1. Mathematikschularbeit 8a
02.12.2019

Name: ______________________________

Punkte: ______________________________

Note: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Punkteschlüssel

Note	Sehr Gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht Genügend
Punkte	36-31	30-25	24-18	17-12	< 12

wobei jeweils zumindest 12 Grundkompetenzpunkte erreicht werden müssen!

Viel Erfolg!

	Teil 1	Teil 2	Teil 2/Komp. Teil 1	Gesamtpunkte
Punkte	__/18P	__/18P	__/3P	__/36P

Hinweise:

- **Teil 1** prüft „das Wesentliche" ausgewählter Themenbereiche. Die Aufgaben in Teil 1 werden mit insgesamt 18 Punkten bewertet, jede Aufgabe mit 1 Punkt. Um eine positive Beurteilung zu erhalten, sind in jedem Fall zumindest $^{2}/_{3}$ der Punkte in diesem Bereich - das sind 12 Punkte - zu erreichen.
- **Teil 2** umfasst den „Erweiterungsstoff". In den drei Aufgaben können insgesamt 18 Punkte erreicht werden. Es können 3 Ausgleichspunkte (gekennzeichnet mit **A**) für den Teil 1 erworben werden.
- Sowohl in **Teil 1** als auch **Teil 2** dürfen der Taschenrechner und Geogebra als Hilfsmittel verwendet werden. Alle Rechenwege müssen jedoch nachvollziehbar angeschrieben werden.

Teil I: Grundkompetenzen (12 Punkte)

Beispiel 1: (1 Punkt)

Man unterscheidet natürliche, ganze, rationale, reelle und komplexe Zahlen.

Kreuze die **beiden** zutreffenden Aussagen an.

Das Produkt zweier komplexer Zahlen ist nie reell.	☐
Ist $x = -3 \cdot 10^{-2}$ dann gilt x ∈ Q:	■
$0,\dot{7}$ ist eine irrationale Zahl.	☐
Die Differenz zweier natürlicher Zahlen ist stets eine natürliche Zahl.	☐
Der Quotient zweier ganzer Zahlen ist stets eine rationale Zahl.	■

Beispiel 2: (1 Punkt)

In einem Autobus befinden sich *F* weibliche und *M* männliche Passagiere und der Lenker des Busses (männlich). Wäre um eine Frau mehr, so wären zusammen mit dem Lenker doppelt so viele Männer wie Frauen in diesem Autobus.

Kreuze die **eine** Gleichung an. die den Zusammenhang zwischen der Anzahl der Frauen und der Anzahl der Männer in diesem Autobus richtig beschreibt!

$2 \cdot (M + 1) = F + 1$	☐
$M = 2 \cdot F - 1$	☐
$F + 1 = 2 \cdot M + 1$	☐
$F + 1 = 2 \cdot M$	☐
$M + 1 = 2 \cdot (F + 1)$	■
$2 \cdot F = M$	☐

Beispiel 3: (1 Punkt)

Gegeben ist die Gleichung $(k + 1) \cdot x^2 + 2 \cdot (k + 3) \cdot x + (k + 4) = 0$.
Bestimme k ∈ R so, dass die Gleichung genau eine Lösung hat.

k = -5

Beispiel 4: (1 Punkt)

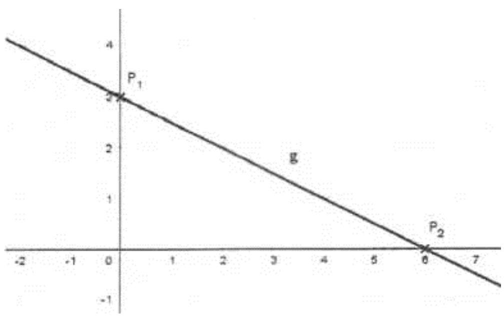
Von einem linearen Gleichungssystem ist die erste der beiden Gleichungen in der Abbildung graphisch dargestellt (P_1 und P_2 sind ganzzahlig).

Ergänze die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Hat die zweite Gleichung die Form ______1____, so ___2______.

1	
$y = -x + 1$	☐
$y = \frac{-x}{2} + 4$	■
y=5	☐

2	
hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen	☐
hat das Gleichungssystem die Lösungsmenge <u>L = {(-2,4)}</u>	☐
hat das Gleichungssystem keine Lösung	■

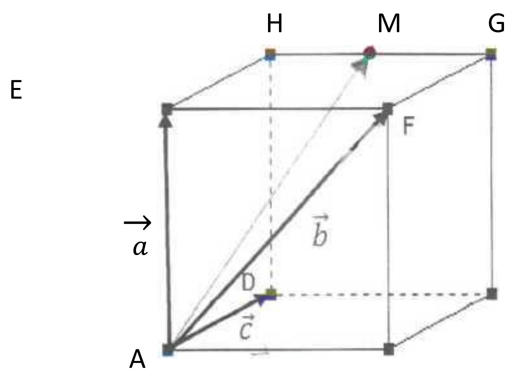


Beispiel 5: (1 Punkt)

Gegeben ist ein Würfel mit $\overrightarrow{AE} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AF} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$ und der Mittelpunkt M der Kante $\overline{HG}$.

Drücke den Vektor $\overrightarrow{AM}$ $durch$ $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus (ohne Vereinfachung).

$\overrightarrow{AM} = c + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$



Beispiel 6: (1 Punkt)

Begründe rechnerisch, ob die 3 Punkte A = (-5 | 3), B = (3 | -1) und C = (-7 | 3) auf einer Geraden liegen.

AB = (8 | -4) und (-7 | 3) = (-5 | 3) + t ·(8 | -4) mit t = - $^1/_4$ für die x-Koordinate. Für y müsste t=0 gelten. Liegen daher nicht auf einer Geraden!

Beispiel 7: (1 Punkt)

Die Anzahl der Atome einer radioaktiv zerfallenden Substanz nimmt näherungsweise pro Zeiteinheit um denselben Prozentsatz ab. Beim radioaktiven Isotop Caesium 137 zerfällt innerhalb von 30 Tagen ("Halbwertszeit") die Hälfte der zu Beginn vorhandenen Atome.

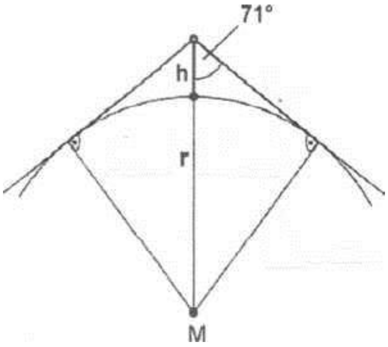
Berechne den Prozentsatz auf eine Dezimalstelle genau, um den die Anzahl der Caesium 137 Atome täglich abnimmt!

p = ca. 2,3 %

Beispiel 8: (1 Punkt)

Dennis Tito, der 2001 als erster Weltraumtourist unterwegs war, sah die Erdoberfläche unter einem Sehwinkel von 142°.

Berechne, wie hoch (h) über der Erdoberfläche sich Dennis Tito befand, wenn vereinfacht die Erde als Kugel mit einem Radius r = 6370 km angenommen wird!



h = 6370 / sin(71°) – 6370 = 367, 04 km

Beispiel 9: (1 Punkt)

Das **Frequency Festival** (auch **Frequency** oder **FM4-Frequency-Festival** genannt) ist ein jährlich stattfindendes, österreichisches Musikfestival. In der folgenden Tabelle sind die Besucherzahlen des Festivals im Zeitraum 2012 bis 2017 angegeben.

Jahr	**2012**	**2013**	**2014**	**2015**	**2016**	**2017**
Besucher (in 1000)	**160**	**135**	**200**	**130**	**120**	**140**

Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an!

■ Die absolute Änderung der Besucherzahlen im Zeitraum 2012 / 2015 beträgt -30000.

□ Die relative Änderung der Besucherzahlen im Zeitraum 2012 / 2017 ist positiv.

■ Der Differenzenquotient der Besucherzahlen im Zeitraum 2014 / 2017 beträgt -20000.

□ Die durchschnittliche jährliche Änderung der Besucherzahlen im Zeitraum 2012 / 2017 ist positiv.

□ Die relative Änderung der Besucherzahlen im Zeitraum 2013 / 2017 ist negativ.

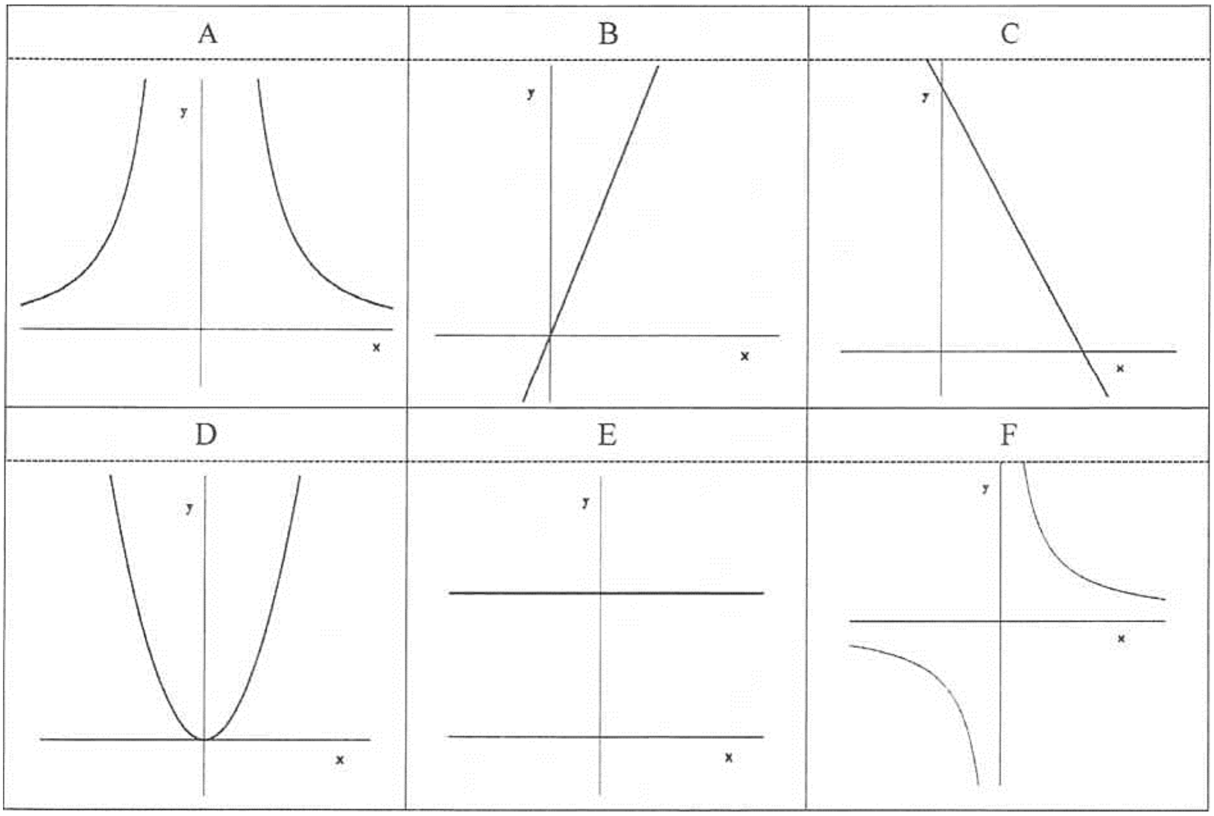
<u>Beispiel 10</u>: (1 Punkt)

Gegeben ist die Formel $\boldsymbol{x} = \frac{5st^2}{ru^2}$ mit r, s, t, u ∈ R^+. Sind alle Variablen bis auf eine konstant, so kann x als Funktion dieser Variablen aufgefasst werden.

Weise jeder Funktion den passenden Funktionsgraphen zu, trage dazu den jeweiligen Buchstaben in die Tabelle ein:

x = f(s) r, t, u sind konstant	x = f(t) r, s, u sind konstant	x = f(r) s. t, u sind konstant	x = f(u) r, s, t sind konstant

B D F A



<u>Beispiel 11</u>: (1 Punkt)

Gegeben ist eine Zeit-Ort-Funktion s in Abhängigkeit von der Zeit t sowie die dazugehörige Zeit-Geschwindigkeitsfunktion v.

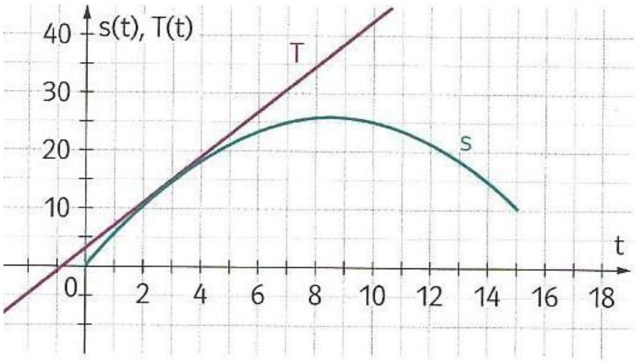
Kreuze die beiden jedenfalls zutreffenden Aussagen an!

$s'(2) = \frac{s(2) - s(t)}{2 - t}$	☐
$s'(2) = \lim\limits_{t \to 2} \frac{s(2) - s(t)}{2 - t}$	☐
$v'(2) = \lim\limits_{t \to 2} \frac{s(2) - s(t)}{2 - t}$	☐
$s'(2) = v(2)$	☐
$v'(2) = \lim\limits_{h \to 2} \frac{v(2 + h) - v(2)}{h}$	☐

Aussage 2 und Aussage 4

Beispiel 12: (1 Punkt)

Ein Körper bewegt sich gemäß einer Zeit-Ort-Funktion s.
In der Abbildung ist der Graph dieser Zeit-Ort-Funktion s in Abhängigkeit von der Zeit t (s in Meter, t in Sekunden) gegeben. Weiters sieht man den Graphen der Tangente T von s an der Stelle 3 mit der Funktionsgleichung T(t) = 3,93 t + 3,27.
Bestimme die Momentangeschwindigkeit des Körpers zum Zeitpunkt 3.



Momentangeschwindigkeit: **3,93 $^{m}/_{s}$.**

Beispiel 13: (1 Punkt)

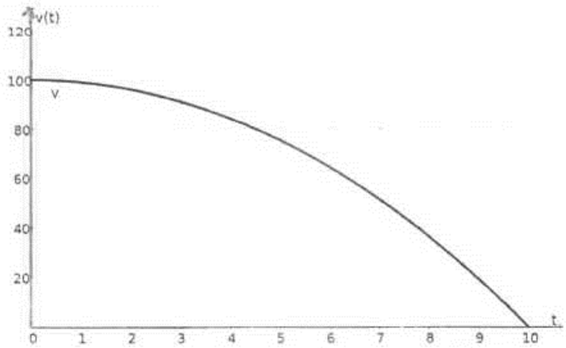
Bestimme das unbestimmte Integral von: $\mathbf{f(s)} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{2}} \cdot \mathbf{s^t}$ (a, t ∈ R*)

Unbestimmtes Integral: $^{a}/_{2} \cdot s^{t+1}$ / t+1 + c

Beispiel 14: (1 Punkt)

Die Abbildung rechts zeigt den Graphen einer Funktion v, die die Geschwindigkeit v(t) in Abhängigkeit von der Zeit t (t in Sekunden) modelliert.

Gib an, was die Aussage $\int_0^5 v(t)dt > \int_5^{10} v(t)dt$ im vorliegenden Kontext bedeutet!



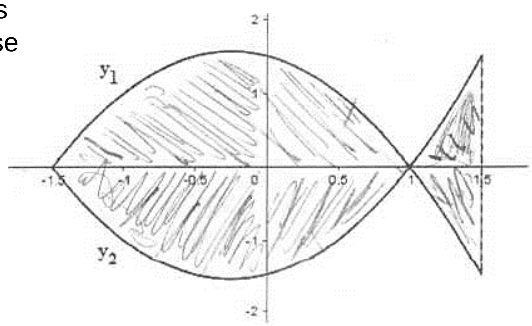
Antwort: In Zeitintervall [0; 5] ist der zurückgelegte Weg größer als im Zeitintervall [5; 10]!

Beispiel 15: (1 Punkt)

Eine CNC-Maschine soll Pinwände in Form eines Fisches ausschneiden. Die Außenkante wird durch die zur x-Achse symmetrische Funktion y_1 und y_2 beschrieben (Maße in dm):

$y_2(x) = x^2 + \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$ für $-1{,}5 \leq x \leq 1{,}5$

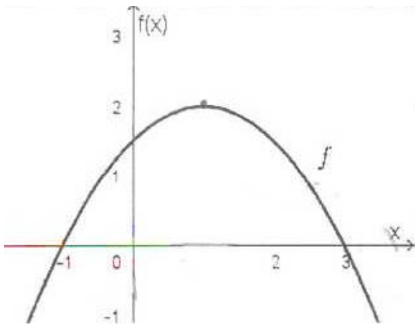
Berechne den im Bild dargestellten Flächeninhalt des ganzen Fisches. Runde dabei auf 2 Nachkommastellen.



A = 2 · 2,604 + 2 · 0,354 = 5,92dm²

Beispiel 16: (1 Punkt)
Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion f zweiten Grades.
F ist eine Stammfunktion von f.

Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an.



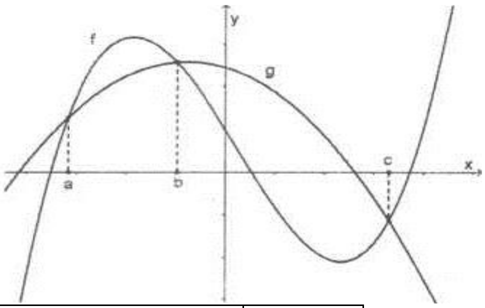
F(0) = 1,5	☐
F verläuft im Intervall [-1; 3] oberhalb der x- Achse.	☐
x_2 = 1 ist eine Wendestelle von *F.*	■
x_3 = 3 ist eine lokale Minimumstelle von *F.*	☐
F ist im Intervall [-1; 3] streng monoton steigend.	■

Beispiel 17: (1 Punkt)

Die endliche Fläche,die von den Funktionsgraphen von f und g eingeschlossen ist, soll berechnet werden.

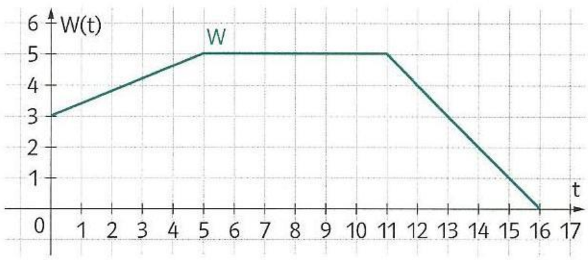
Welche der folgenden Ausdrücke gibt den gesuchten Flächeninhalt korrekt an?

Kreuze die beiden zutreffenden Lösungen an!



$\int_a^c [f(x) - g(x)]dx$	☐
$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx + \int_b^c [g(x) - f(x)]dx$	■
$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx + \int_b^c [f(x) - g(x)]dx$	☐
$\int_a^b f(x)dx - \int_b^c g(x)dx$	☐
$\left\lvert\int_a^b [f(x) - g(x)]dx\right\rvert + \left\lvert\int_b^c [f(x) - g(x)]\, dx\right\rvert$	■

Beispiel 18: (1 Punkt)
In einen Behälter wird Wasser eingefüllt. Die Zuflussgeschwindigkeit W in ml/s wird in nebenstehender Abbildung in Abhängigkeit von der Zeit (in Sekunden) dargestellt. Berechne, wie viel Liter Wasser in den Behälter geleert werden!



62,5 ml = 0,0625 Liter.

Teil 2: (Erweiterungsstoff)

Beispiel 1: (6 Punkte)

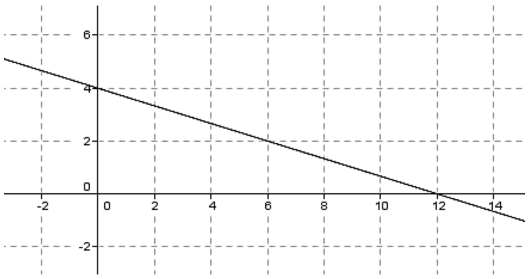
Gegeben ist eine Kostenfunktion K mit der Funktionsgleichung $K(x) = 0{,}1 \cdot x^2 + 1$ *mit* $x \in R^+$.

a) Berechne jene Produktionsmenge x_0, bei der die minimalen Stückkosten auftreten. Diese Produktionsmenge wird auch als **Betriebsoptimum** bezeichnet.

Minimale Stückkosten $(K(x) / x)' = (0{,}1x + {}^1/_x) = 0{,}1 - {}^1/_{x^2} = 0$ für $x_0 = 3{,}16$.

b) (2P) Die lineare Nachfrage-Preis-Funktion p verläuft durch den Höchstpreispunkt H und den Sättigungspunkt S.

Entnimm der Grafik die ganzzahligen Koordinaten für H und S und ermittle die Gleichung der **Nachfrage-Preis-Funktion p** und die Gleichung der **Erlösfunktion E**, die die Gesamteinnahmen beschreibt, wenn x Mengeneinheiten zum Preis p(x) verkauft werden!



$p(x) = -{}^1/_3\, x + 4$
Erlösfunktion $E(x) = p \cdot x = -{}^1/_3\, x^2 + 4x$

c) Angenommen, der Sättigungspunkt S der Preisfunktion p(x) verschiebt sich bei gleichbleibendem Höchstpreispunkt H nach rechts. Die auftretende Extremstelle der Gewinnfunktion G ermittelt man aus der Gleichung $2 \cdot (k - 0{,}1) \cdot x + d = 0$.
Ergänze die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Die Steigung k der Preisfunktion p ____1____ und die auftretende Extremstelle der Gewinnfunktion G ______2______.

1	
■	wird größer
O	bleibt unverändert
O	wird kleiner

2	
O	verschiebt sich nach links
O	bleibt an der gleichen Stelle
■	verschiebt sich nach rechts

d) Der Marktpreis wird konstant mit p = 3 GE angenommen. Berechne die Gewinnfunktion G! **(A)**

$G(x) = 3x - (0{,}1x^2 + 1) = -0{,}1x^2 + 3x - 1$

e) Es ist üblich, dass die Gewinnzone in Form eines Intervalls angegeben wird. Dazu wird die Gewinnschwelle auf das nächste Ganze aufgerundet und die Gewinngrenze auf das nächste Ganze abgerundet. Gib jenes Intervall für x an, in welchem Gewinn erzielt wird!

G(x) hat Nullstellen bei $x_1 = 0{,}34$ und $x_2 = 29{,}6$. Daher Gewinnintervall [1; 29]

Bei Verwendung der obigen Nachfrage – Preis Funktion erhält man:

$G(x) = -\,{}^{13}/_{30}\, x^2 + 4x - 1 = 0$ und daraus die Nullstellen:

$x_1 = 0{,}26$ und $x_2 = 8{,}97$ und daher das Gewinnintervall [1; 8]

<u>Beispiel 2</u>: (6 Punkte)

Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)dx$ einer Funktion f kann zur Beschreibung verschiedener Zusammenhänge genutzt werden.

a) Bestimme die Funktionsgleichung jener Stammfunktion F der Funktion f mit $f(x) = x^2 - x + 5$, deren Graph durch den Punkt P (3 | 5) verläuft!

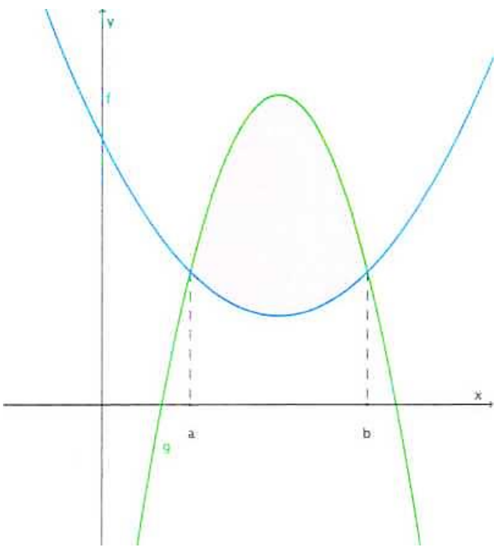
$F(x) = {}^{1}/_{3}\, x^3 - {}^{1}/_{2}\, x^2 + 5x + c$ mit $F(3) = 5$. Daher gilt:
$F(3) = 9 - {}^{9}/_{2} + 15 + c = 5$ und $c = -\,{}^{29}/_{2}$

b) (2P) Die Funktionen F und G sind zwei verschiedene Stammfunktionen dieser Funktion f. Notiere den Zusammenhang zwischen den Funktionsgleichungen der Funktionen F in Form einer Gleichung und beschreibe in Worten, wie dieser Zusammenhang am Verlauf der Graphen der beiden Funktionen F und G erkennbar ist!

$F(x) = G(x) + c$. Die beiden Stammfunktionen unterscheiden sich nur durch eine Konstante c. Das heißt, die Graphen von F(x) und G(x) sind jeweils unterschiedlich entlang der y- Achse verschoben und haben einen konstanten Abstand von c zueinander.

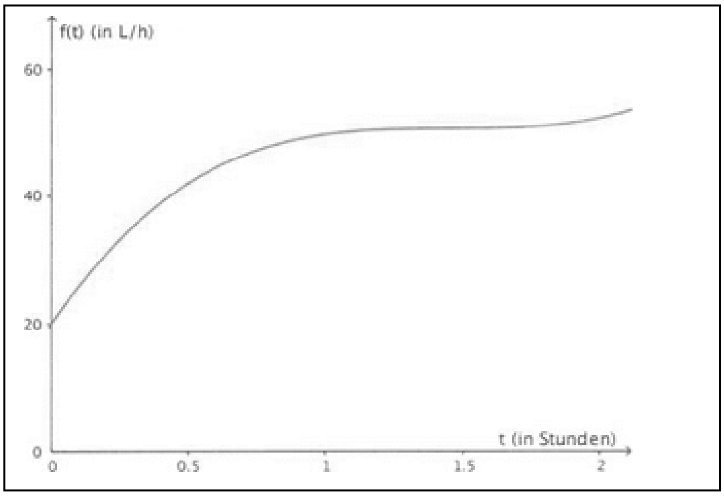
c) Gib eine Formel für die Maßzahl A des Flächeninhalts der von den Graphen der Funktionen f und g begrenzten Fläche an (siehe Abbildung)! **(A)**

$$A = \int_a^b g(x) - f(x)dx$$



d) (2P) Die Änderung der in einer Regentonne erhaltenen Wassermenge während eines zweistündigen Regens kann mithilfe einer Polynomfunktion f beschrieben werden.

Die nebenstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f im Intervall [0; 2].



Das bestimmte Integral $\int_0^2 f(t)dt$ hat annähernd den Wert 106. Interpretiere diesen Wert im inhaltlichen Kontext!

106 (Liter) entspricht der Wassermenge, die innerhalb von 2 Stunden in die Tonne geflossen ist.

Gib einen Term an, mit dem man die durchschnittliche Änderung der Wassermenge m in Litern pro Stunde in einem Zeitintervall [t_1; t_2] mit $t_1 \geq 0$ *und* $t_2 \leq 2$ berechnen kann!

$$m = \frac{F(t_2) - F(t_1)}{t_2 - t_1}$$

<u>Beispiel 3</u>: (6 Punkte)

Auf einem Kinderspielplatz soll eine neue Rutsche aufgestellt werden (Abb.1).

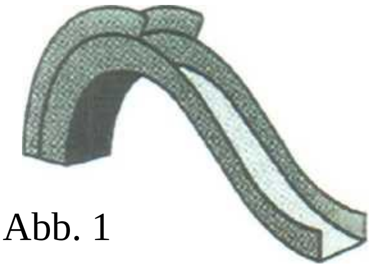


Abb. 1

Der Querschnitt der Rutsche kann durch zwei Funktionen modelliert werden. Bei der Funktion f durch die Punkte A, B und C handelt es sich um eine Polynomfunktion, zwischen den Punkten C und D liegt eine konstante Funktion g vor, wobei der Übergang zwischen Rutsche und Auslaufstrecke (Länge 50 cm) in C(2,08 | 0,19) ohne „Knick" erfolgen muss (Abb. 2).

Der Querschnitt der Kinderrutsche zwischen den Punkten A und C kann bezüglich des abgebildeten Koordinatensystems (Längeneinheit jeweils ein Meter in beiden Achsenrichtungen) annähernd durch eine Polynomfunktion f dritten Grades beschrieben werden. Die Gleichung dieser Funktion lautet:

$f(x) = x^3 — 4{,}2 \cdot x^2 + 4{,}5x$

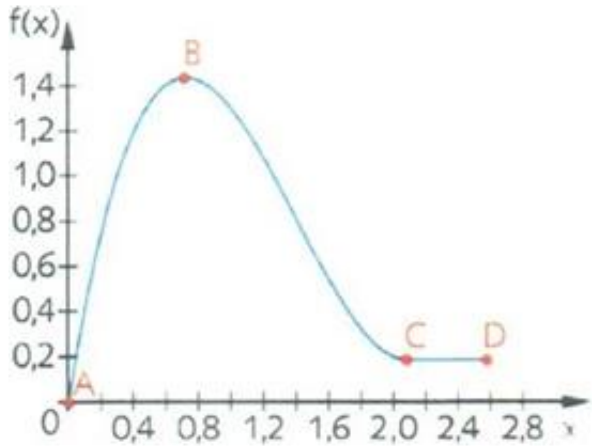


Abb. 2

a) Interpretiere den Kurvenverlauf im Kontext (Monotonie, Monotoniewechsel, Wendepunkte)!

f(x) ist streng monoton steigend im Intervall [0; 0,72] und streng monoton fallend im Intervall [0,8 ; 2,08]. In W(1,4 | 0,81) liegt ein Wendepunkt vor!

b) Argumentiere, welchen Grad eine Polynomfunktion mindestens aufweisen muss, wenn sie den Verlauf zwischen A und C beschreibt!

f(x) muss zumindest dritten Grades sein, denn sonst gäbe es keine Wendestelle.

c) Gib an, welche Bedingungen die Funktion f im Punkt C erfüllen muss. Diese Bedingungen sind in Form von Funktionswerten der Funktion f bzw. ihrer Ableitungsfunktion(en) anzugeben!

In C(2,08 | 0,19) muss gelten: **f(2,08) = 0,19 und f‘ (2,08) = 0**

d) Berechne die Höhe des Punktes B! **B(0,72 | 1,44) liegtin einer Höhe von 1,44m!**

e) Berechne jene Stelle, an der die Rutsche am steilsten ist!

W(1,4 | 0,81) ist Wendepunkt von f(x). Hier ist die Rutsche am steilsten!

f) Berechne den Differenzenquotienten der Funktion f im Intervall [0,72 | 2,08]! Interpretiere das Ergebnis im inhaltlichen Kontext! **(A)**

$$\boxed{\frac{f(2,08)-f(0,72)}{2,08-0,72} = -0,92}$$

Entspricht der durchschnittlichen Steilheit der Rutsche (mittleres Gefälle von 0,92m / m!