

3. Mathematikschularbeit 7a

04.06.2019

Name: _____

Punkte: _____

Note: _____

Unterschrift: _____

Punkteschlüssel

Note	Sehr Gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht Genügend
Punkte	24-20	19-16	15-12	11-8	< 8

wobei jeweils zumindest 8 Grundkompetenzpunkte erreicht werden müssen!

Viel Erfolg!

	Teil 1	Teil 2	Teil 2/Komp. Teil 1	Gesamtpunkte
Punkte	___/12P	___/12P	___/2P	___/24P

Hinweise:

- **Teil 1** prüft „das Wesentliche“ ausgewählter Themenbereiche. Die Aufgaben in Teil 1 werden mit insgesamt 12 Punkten bewertet, jede Aufgabe mit 1 Punkt. Um eine positive Beurteilung zu erhalten, sind in jedem Fall zumindest $\frac{2}{3}$ der Punkte in diesem Bereich - das sind 8 Punkte - zu erreichen.
- **Teil 2** umfasst den „Erweiterungsstoff“. In den drei Aufgaben können insgesamt 12 Punkte erreicht werden. Es können zwei Ausgleichspunkte (gekennzeichnet mit **A**) für den Teil 1 erworben werden.
- Sowohl in **Teil 1** als auch **Teil 2** darf der Taschenrechner als Hilfsmittel verwendet werden. Alle Rechenwege müssen jedoch nachvollziehbar angeschrieben werden.

Teil I: Grundkompetenzen (12 Punkte)

Beispiel 1: (1 Punkt)

Ordne jeder Zahl der linken Tabelle die „kleinste“ Menge der rechten Tabelle zu, in der die Zahl liegt!

$-i$	
$-i^2$	
$i^2 - \sqrt{2}$	
$0,5 \cdot (1 + i^2)$	

A	\mathbb{N}
B	\mathbb{N}^*
C	\mathbb{Z}
D	\mathbb{Q}
E	\mathbb{R}
F	\mathbb{C}

Beispiel 2: (1 Punkt)

Ein chemischer Versuch gelingt mit der Wahrscheinlichkeit $p=0,15$. Es werden 5 gleichartige Versuche hintereinander durchgeführt. Welche Wahrscheinlichkeit wird durch

$10 \cdot 0,85^2 \cdot 0,15^3$ beschrieben? _____

Beispiel 3: (1 Punkt)

Für ein Glücksspiel mit Einsatz 2.-€ erhält man mit $p_1=0,08$ einen Gewinn $G_1=12$.-€, mit $p_2=0,12$ einen Gewinn $G_2=8$.-€, mit $p_3=0,15$ einen Gewinn $G_3=6$.-€, in allen anderen Fällen verliert man den Einsatz. Begründe, ob das Spiel fair ist!

Beispiel 4: (1 Punkt)

Gegeben ist eine differenzierbare reelle Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Der Differenzenquotient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ beschreibt die Steigung der Sekante von f im Intervall $[a; b]$.

Ergänze die Textlücken so, dass eine mathematisch korrekte Aussage entsteht!

Der Ausdruck $\lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ gibt die _____ (1) _____ (2) _____ an.

(1)		(2)	
absolute Änderung	<input type="radio"/>	im Punkt $(a f(a))$	<input type="radio"/>
Mittlere Änderung	<input type="radio"/>	im Punkt $(b f(b))$	<input type="radio"/>
Steigung der Tangente	<input type="radio"/>	Im Intervall $[a; b]$	<input type="radio"/>

Beispiel 5: (1 Punkt)

Gegeben sind vier Funktionen und sechs Ableitungsfunktionen mit $a, b, c \in \mathbb{R}^+$.

Ordne den Funktionen die entsprechende Ableitungsfunktion f' zu!

$f(x) = a \cdot \sin(x) - b \cdot e^{-c \cdot x}$	
$f(x) = a \cdot \cos(x) + b \cdot e^{c \cdot x}$	
$f(x) = -a \cdot \sin(x) + e^{c \cdot x}$	
$f(x) = \sin(a \cdot x) - b \cdot e^x$	

A	$f'(x) = -a \cdot \sin(x) + b \cdot c \cdot e^{c \cdot x}$
B	$f'(x) = a \cdot \cos(x) + b \cdot c \cdot e^{-c \cdot x}$
C	$f'(x) = a \cdot \sin(x) + b \cdot c \cdot e^{c \cdot x}$
D	$f'(x) = -a \cdot \cos(x) + c \cdot e^{x \cdot c}$
E	$f'(x) = a \cdot \cos(a \cdot x) - b \cdot e^x$
F	$f'(x) = -a \cdot \cos(x) + e^{x \cdot c}$

Beispiel 6 : (1 Punkt)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 3x - \frac{4}{5}$.

Berechne die Gleichung der Tangente an der Stelle $x = -1$!

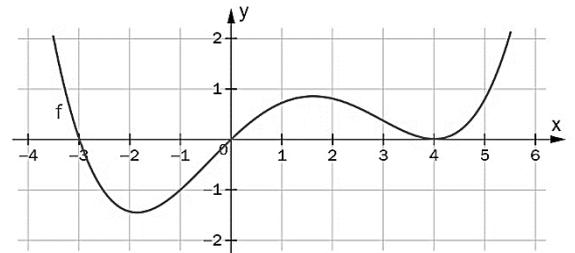
t: _____

Beispiel 7: (1 Punkt)

Eine reelle Funktion f ist durch ihren Graphen gegeben.

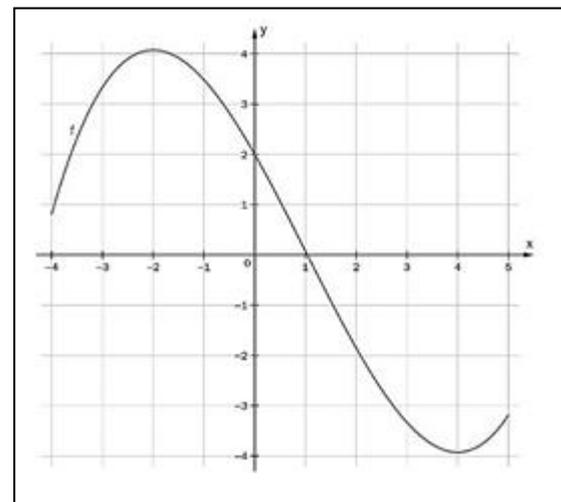
Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an!

$f'(2) > 0$	<input type="radio"/>
$f'(0) = 0$	<input type="radio"/>
$f'(1) > 0$	<input type="radio"/>
$f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [0; 4]$	<input type="radio"/>
$f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [4; 5]$	<input type="radio"/>



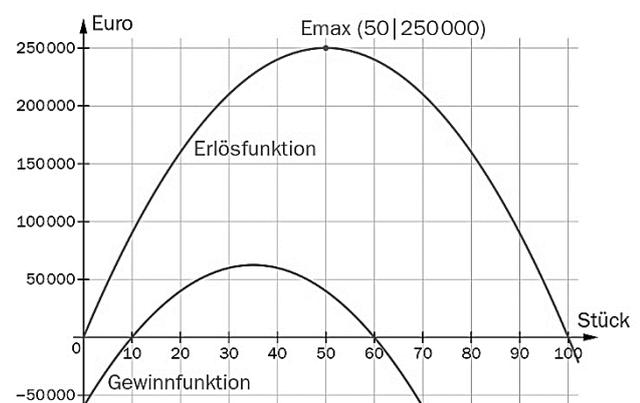
Beispiel 8: (1 Punkt)

Eine Polynomfunktion f vom Grad 3 ist im Intervall $[-4; 5]$ durch ihren Graphen gegeben. Skizziere den Graphen der Ableitungsfunktion f' im gegebenen Koordinatensystem!



Beispiel 9: (1 Punkt)

In der folgenden Graphik sind Gewinn- und Erlösfunktion eingetragen. Man weiß, dass die Kostenfunktion linear ist. Zeichne die zur Gewinn- und Erlösfunktion passende Kostenfunktion ein!



Beispiel 10: (1 Punkt)

Gegeben ist eine reelle Funktion f mit $f(x) = 3x + 2$.

Kreuze die beiden Eigenschaften an, die auf die Funktion f zutreffen!

$f(x + 1) = f(x) + 3$	<input type="radio"/>
$f(x + 1) = f(x) + 2$	<input type="radio"/>
$f(x + 1) = 3 \cdot f(x)$	<input type="radio"/>
$f(x + 1) = 2 \cdot f(x)$	<input type="radio"/>
$f(x_2) - f(x_1) = f'(x) \cdot (x_2 - x_1)$ für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ und $x_1 \neq x_2$	<input type="radio"/>

Beispiel 11: (1 Punkt)

In einer Urne befinden sich 10 Kugeln. 3 davon sind gelb, die übrigen rot. Aus der Urne werden mit einem Griff drei Kugeln zufällig gezogen. Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 2 Kugeln gelb sind, beträgt dann:

$P(\text{mindestens 2 Kugeln gelb}) =$ _____

Beispiel 12: (1 Punkt)

Beim Beschleunigen auf der Autobahn ändert sich die Geschwindigkeit v (in m/s) mit der Zeit t (in s). Interpretiere in diesem Zusammenhang:

$$\frac{v(10) - v(3)}{10 - 3}$$

$$v'(10)$$

Teil II: Erweiterungsstoff (12 Punkte)

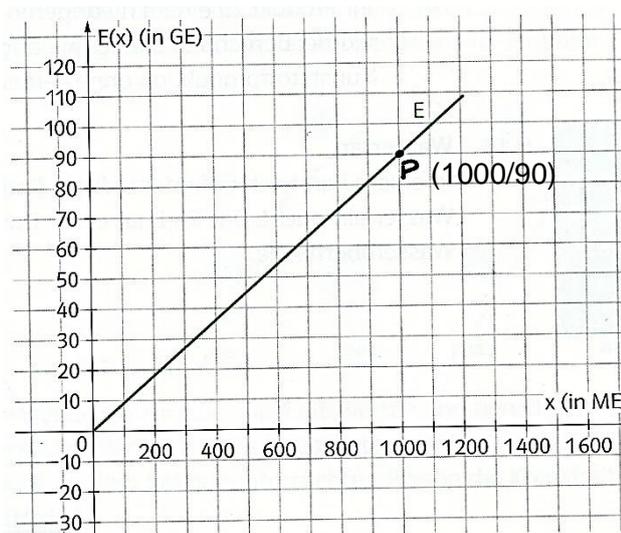
Beispiel 1: (5 Punkte)

Die ChemAG produziert einen Kunststoff. Über diese Produktion liegen folgende Informationen vor:

- Die maximale monatliche Produktionsmenge (= Kapazitätsobergrenze) beträgt 1200 Mengeneinheiten (ME).
- Die Produktionskosten $K(x)$ in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x können durch eine lineare Funktion modelliert werden. Die Termdarstellung dieser Funktion lautet: $K(x) = 0,05 \cdot x + 30$. Dabei werden die Produktionskosten in Geldeinheiten (GE) und die Produktionsmenge x in Mengeneinheiten (ME) angegeben. Die Betriebsstatistik der ChemAG liefert folgende Tabelle zu den Produktionskosten:

Produktionsmenge x in ME	200	400	500	700	800
Produktionskosten $K(x)$ in GE	40	50	55	60	70

- Aufgrund der Marktsituation kann man zum Marktpreis jede beliebige Menge des Kunststoffs verkaufen. Die Erlösfunktion $E: x \rightarrow E(x)$, die jeder verkauften Kunststoffmenge x (in ME) den erzielten Erlös (Umsatz) $E(x)$ (in GE) zuordnet, ist in der nebenstehenden Abbildung veranschaulicht.



- a) **(A)** In der oben angeführten Tabelle zu den Produktionskosten entspricht ein Zahlenpaar $(x | K(x))$ nicht einer linearen Modellierung von K , weil $K(x)$ falsch übermittelt worden ist. Korrigiere die nachstehende Tabelle entsprechend!

Produktionsmenge x in ME	200	400	500	700	800
Produktionskosten $K(x)$ in GE					

- b) Ermittle anhand des gegebenen Graphen die Erlösfunktion. Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an!

Die Erlösfunktion E ist linear.	<input type="radio"/>
Jede Steigerung der verkauften Menge x um 10% erhöht den Erlös $E(x)$ auf 110%.	<input type="radio"/>
Jede Steigerung der verkauften Menge x um 10ME erhöht den Erlös $E(x)$ um 110GE.	<input type="radio"/>
Der erzielte Erlös $E(x)$ und die verkaufte Menge x sind zueinander indirekt proportional.	<input type="radio"/>
Der Preis pro ME des Kunststoffs nimmt mit wachsender Verkaufsmenge x zu.	<input type="radio"/>

- c) Die Gewinnfunktion G ordnet jeder monatlichen Produktionsmenge x den Gewinn $G(x)$ zu. Zeige, dass $G(x) = 0,04 \cdot x - 30$ ist und trage auch den Graphen von G in die obige Abbildung ein! Berechne den maximalen monatlichen Gewinn der Kunststoffproduktion!

- d) Die Funktion \bar{K} mit $\bar{K}(x) = \frac{K(x)}{x}$ ($x > 0$) nennt man Stückkostenfunktion der Produktion. Formuliere in Worten, was $\bar{K}(x)$ im Sachzusammenhang angibt, und begründe, dass \bar{K} keine indirekte Proportionalitätsfunktion ist.
- e) Zeige unter Verwendung der Ableitungsfunktion \bar{K}' , dass die Stückkostenfunktion \bar{K} für $x > 0$ streng monoton fallend ist, und begründe, dass die *ChemAG* mit den kleinsten Stückkosten arbeitet, wenn sie an der Kapazitätsobergrenze (1200ME) produziert.

Beispiel 2: (4 Punkte)

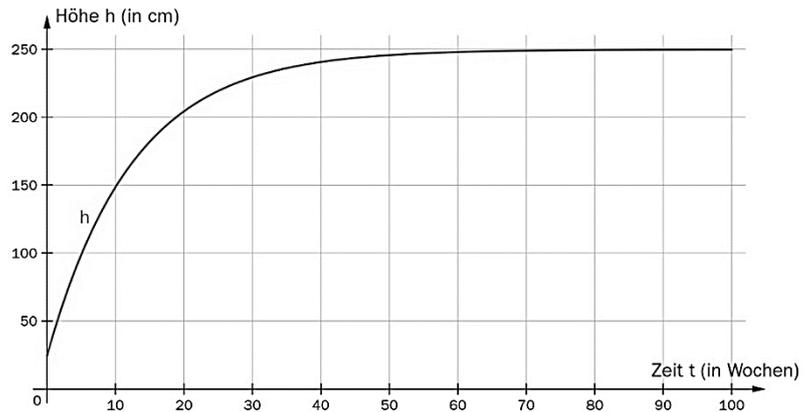
Im Folgenden wird das Wachstum einer bestimmten Zierpflanze untersucht. Die endgültige Größe einer Pflanze hängt nicht nur von der speziellen Sorte, sondern auch von ihrem Standort, der Nährstoffversorgung etc. ab. Sie liegt bei der hier betrachteten Sorte in der Regel zwischen 1,5 m und 3,0 m.

Der Wachstumsverlauf dieser Pflanze wurde ab der Pflanzung 100 Wochen lang beobachtet.

Ihre Höhe h (in cm) in Abhängigkeit der Zeit t (in Wochen seit der Pflanzung) kann mathematisch modelliert werden durch:

$$h(t) = 250 - 225 \cdot e^{-0,08t}$$

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion h im Beobachtungszeitraum.



- a) (2 Punkte) **Berechne** $h'(20)$ und den Wert des Quotienten $\frac{h(30) - h(10)}{20}$. **(A)**
Interpretiere die **beiden** berechneten Ergebnisse im gegebenen Kontext.
- b) Weise rechnerisch nach, dass die Funktion h im gegebenen Intervall kein lokales Maximum hat.
Gibt es ein globales Maximum im gegebenen Intervall? Wenn ja, gib es an! Wenn nein, begründe!
- c) Interpretiere das Krümmungsverhalten und das asymptotische Verhalten der Funktion h im gegebenen Kontext.

Beispiel 3: (3 Punkte)

In Österreich verfügen nach der OECD Studie „Bildung auf einen Blick“ von 2015 nur 21% der Menschen in der Altersgruppe 25 bis 34 Jahre über einen Hochschulabschluss. Der Vergleich der Altersgruppe 55 bis 64 Jahre zeigt für Österreich einen Akademikeranteil dieser Generation von 12%. Österreich schneidet hingegen im Bereich der Abschlussquoten im Sekundarbereich (Matura und Lehre) mit 82% der erwerbstätigen Bevölkerung weit über dem OECD-Durchschnitt ab, der bei 72% liegt. (Quelle: uniko-PEDIA).

- a) In einem Clubhotel urlauben 40 Österreicher der Altersgruppe 25 bis 34 Jahre. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, unter ihnen zumindest einen Akademiker anzutreffen?
- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, in einem Ferienclub für „Beinahe Senioren“, zumindest einen Akademiker anzutreffen, wenn dort 100 Personen dieser Altersklasse (55 – 64 Jahre) urlauben?
- c) Villach hat derzeit ca. 60000 Einwohner. Davon sind etwa 70% erwerbstätig. Wieviele Villacher sollten gemäß den vorliegenden Daten einen Abschluss im Sekundarbereich haben? Bestimme Erwartungswert und Standardabweichung!