# 2. Mathematikschularbeit 8a
# 16.3.2018

**Name:** ______________________________

**Punkte:** ______________________________

**Note:** ______________________________

**Unterschrift:** ______________________________

**Punkteschlüssel**

| Note | Sehr Gut | Gut | Befriedigend | Genügend | Nicht Genügend |
|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | 48-41 | 40-33 | 32-24 | 23-16 | < 16 |

wobei jeweils zumindest 16 Grundkompetenzpunkte erreicht werden müssen!

**Viel Erfolg!**

| | Teil 1 | Teil 2 | Teil 2/Komp. Teil 1 | Gesamtpunkte |
|---|---|---|---|---|
| Punkte | __/24P | __/24P | __/4P | __/48P |

**Hinweise:**

- **Teil 1** prüft „das Wesentliche“ ausgewählter Themenbereiche. Die Aufgaben in Teil 1 werden mit insgesamt 24 Punkten bewertet, jede Aufgabe mit 1 Punkt. Um eine positive Beurteilung zu erhalten, sind in jedem Fall zumindest $^2/_3$ der Punkte in diesem Bereich - das sind 16 Punkte - zu erreichen.
- **Teil 2** umfasst den „Erweiterungsstoff“. In den Aufgaben können insgesamt 24 Punkte erreicht werden. Es können vier Ausgleichspunkte (gekennzeichnet mit **(*)**) für den Teil 1 erworben werden.
- Sowohl in **Teil 1** als auch **Teil 2** darf der Taschenrechner und ein CAS als Hilfsmittel verwendet werden. Alle Rechenwege müssen jedoch nachvollziehbar angeschrieben werden.

**Teil I: Grundkompetenzen (24 Punkte)**

**<u>Beispiel 1</u> : (1 Punkt)**
Die Menge $M = \{x \in \mathbb{Q} \mid 2 < x < 5\}$ ist eine Teilmenge der rationalen Zahlen.
Welche der im Folgenden angeführten Aussagen gelten?

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

| | |
|---|---|
| 4,999 ist die größte Zahl, die zur Menge M gehört. | □ |
| Es gibt unendlich viele Zahlen in der Menge M, die kleiner als 2,5 sind. | ■ |
| Die Menge M enthält keine Elemente der komplexen Zahlen. | □ |
| Jede reelle Zahl, die größer als 3 und kleiner als 5 ist, ist in der Menge M enthalten. | □ |
| Alle Zahlen $m \in M$ können in der Form $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in Z, b \neq 0$ geschrieben werden. | ■ |

**<u>Beispiel 2</u> : (1 Punkt)**
An einer Projektwoche nehmen insgesamt 25 Schüler/innen teil. Die Anzahl der Mädchen wird mit x bezeichnet, die Anzahl der Burschen mit y. Die Mädchen werden in Dreibettzimmern untergebracht, die Burschen in Vierbettzimmern, insgesamt stehen 7 Zimmer zur Verfügung. Die Betten aller 7 Zimmer werden belegt, es bleiben keine leeren Betten übrig.

Stellen Sie ein Gleichungssystem aus zwei Gleichungen auf, mit dem die Anzahl der Mädchen und der Burschen berechnet werden kann!

1. Gleichung: $x + y = 25$
2. Gleichung: $^{x}/_{3} + {}^{y}/_{4} = 7$ Lösung: x=9, y=16

**<u>Beispiel 3</u> : (1 Punkt)**
Die Gleichung $x^2 - 6x + c = 0$ mit $c \in \mathbb{R}$ hat nicht für jeden beliebigen Wert von c reelle Lösungen. Geben Sie die Bedingung an, die c erfüllen muss, damit die gegebene Gleichung in der Menge der reellen Zahlen genau zwei Lösungen hat.

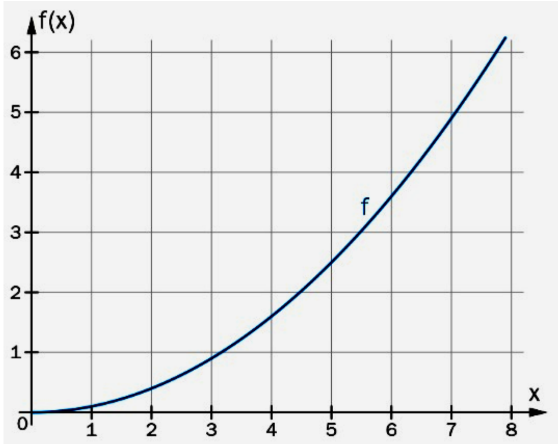
Es muss gelten: $9 - c > 0$ d.h. $c < 9$.

**<u>Beispiel 4</u> : (1 Punkt)**
Ein Maibaum wirft einen Schatten von etwa 25m Länge. Die Sonnenstrahlen treffen auf den Baum unter einem Tiefenwinkel von ca. 42°. Berechnen Sie die Höhe des Maibaums!

tan(42°) = h / 25. Daraus berechnet man h=25 · tan(42°) = 22,51m.

**<u>Beispiel 5</u> : (1 Punkt)**
Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = 0{,}1x^2$. Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die für die gegebene Funktion zutreffend sind!

| | |
|---|---|
| Die absolute Änderung in den Intervallen [0; 3] und [4; 5] ist gleich groß. | ■ |
| Die mittlere Änderungsrate in den Intervallen [0; 2] und [2; 4] ist gleich. | ○ |
| Die momentane Änderungsrate an der Stelle x = 5 hat den Wert 2,5. | ○ |
| Die momentane Änderungsrate an der Stelle x = 2 ist größer als die momentane Änderungsrate an der Stelle x = 6. | ○ |
| Die Steigung der Sekante durch die Punkte (3 \| f(3)) und B (6 \| f(6)) ist größer als die momentane Änderungsrate an der Stelle x = 3. | ■ |




**<u>Beispiel 6</u> : (1 Punkt)**
Ein Körper der Masse m (in kg), der sich mit einer Geschwindigkeit v (in m/s) bewegt, besitzt eine kinetische Energie $E_k$ (in J), für die gilt:

$$E_k(m, v) = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

Beschreiben Sie, wie sich eine Verdoppelung von m und eine gleichzeitige Halbierung von v auf die kinetische Energie $E_k$ auswirkt.

Lösung: Die kinetische Energie $E_k$ ist nur mehr halb so groß!

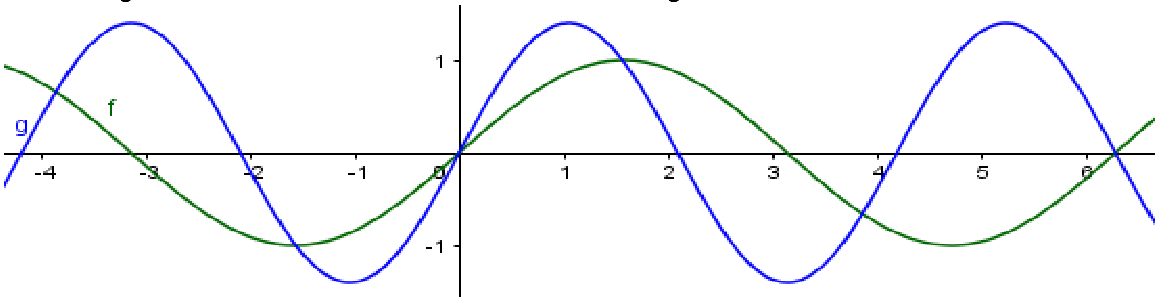
**<u>Beispiel 7</u> : (1 Punkt)**
Gegeben sind vier Funktionstypen. Für alle angeführten Funktionen gilt: $a \neq 0$, $b \neq 0$; $a, b \in \mathbb{R}$.
Ordnen Sie den vier Funktionstypen jeweils die passende Eigenschaft zu!

| | |
|---|---|
| Lineare Funktion f mit $f(x) = a \cdot x + b$ | C |
| Exponentialfunktion f mit $f(x) = a \cdot b^x$ ($b > 0, b \neq 1$) | A |
| Wurzelfunktion f mit $f(x) = a \cdot x^{\frac{1}{2}} + b$ | F |
| Sinusfunktion f mit $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ | D |

| | |
|---|---|
| A | Die Funktion f ist für $a > 0$ und $0 < b < 1$ streng monoton fallend. |
| B | Die Funktion f besitzt genau drei Nullstellen. |
| C | Die Funktion f besitzt in jedem Punkt die gleiche Steigung. |
| D | Der Graph der Funktion f besitzt einen Wendepunkt im Ursprung. |
| E | Die Funktion f ist für b=2 konstant. |
| F | Die Funktion f ist nur für $x \geq 0$ definiert. |

**Beispiel 8 : (1 Punkt)**

In der Abbildung sind zwei Funktionen f und g der Form f(x) = $a \cdot \sin(b \cdot x)$ dargestellt. Ergänzen Sie durch Ankreuzen den folgenden Text so, dass eine korrekte Aussage entsteht!



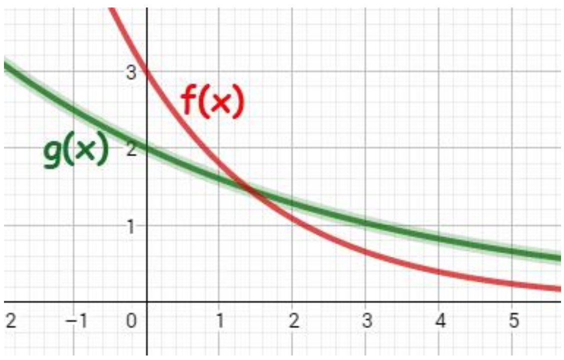

Beim Übergang von f zu g muss _________(1)_____________ und __________(2)____________werden.

| (1) | |
|---|---|
| a vergrößert | ■ |
| a verkleinert | |
| a nicht verändert | |

| (2) | |
|---|---|
| b vergrößert | ■ |
| b verkleinert | |
| b nicht verändert | |

**Beispiel 9 : (1 Punkt)**

In der nebenstehenden Graphik sind zwei Funktionen $f(x) = a \cdot b^x$ und $g(x) = c \cdot d^x$ dargestellt. Welche der folgenden Aussagen sind zutreffend?
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!




| | | |
|---|---|---|
| □ $a < c$ | □ $b > d$ | ■ $a > c$ |
| ■ $b < d$ | □ $a < b$ | |

**Beispiel 10 : (1 Punkt)**

Am 26. April 1986 ereignete sich in Tschernobyl, einem Ort im Norden der Ukraine, eine Nuklearkatastrophe, die als erstes Ereignis in die höchste Kategorie "größter anzunehmender Unfall" (GAU) eingeordnet wurde. Dabei wurden große Mengen an unterschiedlichen radioaktiven Substanzen freigesetzt.

Gelangt über die Nahrung, das Trinkwasser oder die Luft radioaktives Material in den Körper, dann wird ein Teil im Gewebe gespeichert, ein Teil wird abgebaut bzw. ausgeschieden. Die Zeitspanne, bis sich die Menge des aufgenommenen radioaktiven Stoffs im Organismus auf die Hälfte reduziert hat, nennt man biologische Halbwertszeit. Für Jod 131 beträgt diese ca. 180 Tage.

Geben Sie das Zerfallsgesetz für den biologischen Abbau von Jod 131 an!

$N(t) = N_0 \cdot 0{,}9961^t$ bzw.: $N(t) = N_0 \cdot e^{-0{,}00385t}$

**Beispiel 11 : (1 Punkt)**
Gegeben ist die Gerade g: X = (1 | 0 | -1) + t · (1 | -2 | 4). Bestimmen Sie die Gleichung einer Geraden

h: X = (1 | 0 | z) + s · (3 | b | c) so, dass g und h parallel zueinander liegen, aber nicht ident sind!

h: X = (1 | 0 | 0 ) + s · (3 | -6 | 12)

**Beispiel 12 : (1 Punkt)**
Für die bei der Produktion anfallenden Gesamtkosten gilt der Zusammenhang $K(x) = x^3 - 10x^2 + 50x + 150$ (K in Geldeinheiten GE, x in Mengeneinheiten ME). Berechnen Sie die Kostenkehre für die Kostenfunktion K und erläutern Sie ihre allgemeine Bedeutung für den Kostenverlauf!

$K''(x) = 6x – 20 = 0$ und $x= {}^{20}/_{6}$ . Wendepunkt der Kostenfunktion. Hier Übergang von degressiven zu progressiven Kosten.

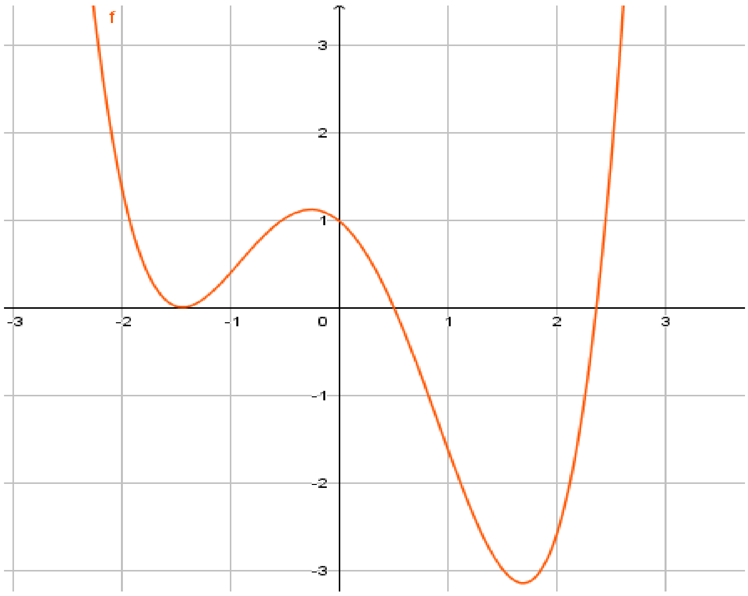
**Beispiel 13 : (1 Punkt)**
Gegeben ist die differenzierbare Funktion f mit $f(x) = a \cdot e^{bx}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Geben Sie die erste Ableitung f ‘(x) an!

$$f'(x) = a \cdot b \cdot e^{bx}$$

**Beispiel 14 : (1 Punkt)**

Gegeben ist der Graph der Polynomfunktion f. Ermitteln Sie die erste Ableitung f´ grafisch!



**<u>Beispiel 15</u> : (1 Punkt)**
Die geradlinige Bewegung eines Autos wird durch die Zeit – Weg Funktion s(t) beschrieben. Innerhalb des Beobachtungszeitraums ist die Funktion s(t) streng monoton wachsend und linksgekrümmt.
Kreuzen Sie die beiden für diesen Beobachtungszeitraum zutreffenden Aussagen an!

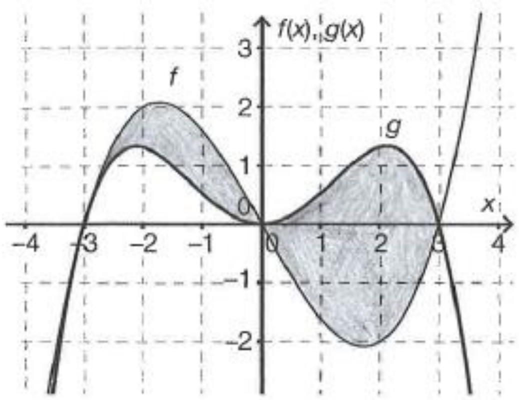
| | |
|---|---|
| Die Geschwindigkeit des Autos wird immer kleiner | □ |
| Der Wert des Differenzenquotienten von s im Beobachtungszeitraum ist positiv | ■ |
| Die Funktionswerte von s ‘(t) sind negativ | □ |
| Die Funktionswerte von s “(t) sind positiv | ■ |
| Der Wert des Differenzialquotienten von s(t) wird immer kleiner | □ |

**<u>Beispiel 16</u> : (1 Punkt)**
Ein Sportwagen wird von 0 m/s auf 28 m/s (≈ 100 km/h) in ca. 4 Sekunden beschleunigt. v(t) beschreibt die Geschwindigkeit in Metern/Sekunde während des Beschleunigungsvorganges in Abhängigkeit von der Zeit t in Sekunden. Die Geschwindigkeit lässt sich durch die Funktionsgleichung $v(t) = -0{,}5t^3 + 3{,}75t^2$ angeben.

Geben Sie die Funktionsgleichung zur Berechnung der momentanen Beschleunigung a(t) zum Zeitpunkt t an! Berechnen Sie die momentane Beschleunigung zum Zeitpunkt t = 2!

$a(t) = v'(t) = -1{,}5t^2 + 7{,}5t \quad a(2) = 9\ {}^{m}/_{s^2}$

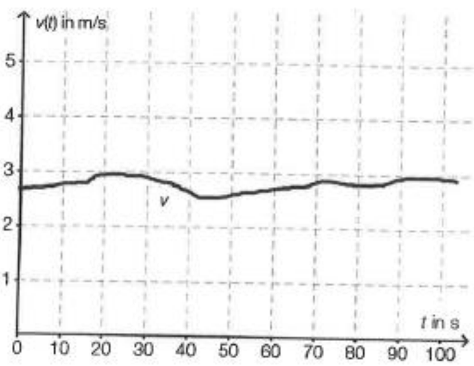
**<u>Beispiel 17</u> : (1 Punkt)**
In der nachstehen Abbildung sind die Graphen der Polynomfunktion f und g dargestellt. Diese schneiden einander an den Stellen -3, 0 und 3 und begrenzen die beiden grau markierten Flächenstücke.




Geben Sie eine Formel zur Berechnung der grau markierten Fläche an!

$$A = \int_{-3}^{0}\big(f(x) - g(x)\big)dx + \int_{0}^{3}\big(g(x) - f(x)\big)dx$$

**<u>Beispiel 18</u> : (1 Punkt)**
Wasser fließt durch eine Wasserleitung, wobei v(t) die Geschwindigkeit des Wassers zum Zeitpunkt t ist. Die Geschwindigkeit v(t) wird in m/s, die Zeit t in s gemessen, der Inhalt der Querschnittsfläche Q des Rohres wird in m² gemessen. Im nachstehenden Diagramm ist die Abhängigkeit der Geschwindigkeit v(t) von der Zeit t dargestellt.

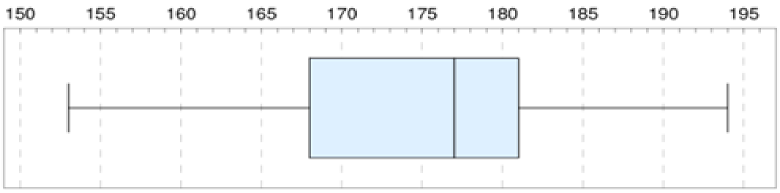



Geben Sie an welche Größe durch den Ausdruck $Q \cdot \int_{10}^{40} v(t)\, dt$ in diesem Zusammenhang berechnet werden kann!

Interpretation: Gesamte Wassermenge, die in 30 Sekunden durch die Leitung fließt!

**<u>Beispiel 19</u> : (1 Punkt)**
In einer Berufsschule wurden die Körpergrößen von 180 männlichen Lehrlingen gemessen. Einige Informationen über die Verteilung der Körpergrößen dieser Lehrlinge wurden im folgenden Kastenschaubild dargestellt.

Körpergröße in cm




Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen für die oben genannten männlichen Lehrlinge zutreffend bzw. nicht zutreffend sind!

| | zutreffend | nicht zutreffend |
|---|---|---|
| Ungefähr die Hälfte aller Lehrlinge ist mindestens 177 cm groß. | ■ | □ |
| Ca. 75% aller Lehrlinge sind 168 cm groß oder größer. | ■ | □ |
| Die durchschnittliche Körpergröße der 180 Lehrlinge beträgt $\frac{153+194}{2}$ = 173,5 cm. | □ | ■ |
| Es gibt deutlich mehr Lehrlinge mit einer Körpergröße zwischen 168 cm und 177 cm als mit einer Körpergröße zwischen 177 cm und 181 cm. | □ | ■ |
| Ungefähr 90 Lehrlinge haben eine Körpergröße zwischen 168 cm und 181 cm. | ■ | □ |

**<u>Beispiel 20</u> : (1 Punkt)**
Ein Fahrzeug ist durch Alarmanlage (A) und Wegfahrsperre (W) gesichert. Die Ausfallswahrscheinlichkeit beträgt bei der Alarmanlage 0,3%, die Wegfahrsperre versagt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,05%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens einer der Sicherungen ihren Zweck erfüllt?

**A:** P(wenigstens eine funktioniert) = 1 – P(alle beide versagen) = 1 – 0,003 · 0,0005 = 0,9999985

**<u>Beispiel 21</u> : (1 Punkt)**
Eine faire Münze wird viermal geworfen. Eine Münze wird als fair bezeichnet, wenn bei einem Wurf jede Seite der Münze mit derselben Wahrscheinlichkeit auftritt. Die Zufallsvariable X gibt die auftretenden Zahlwürfe an.

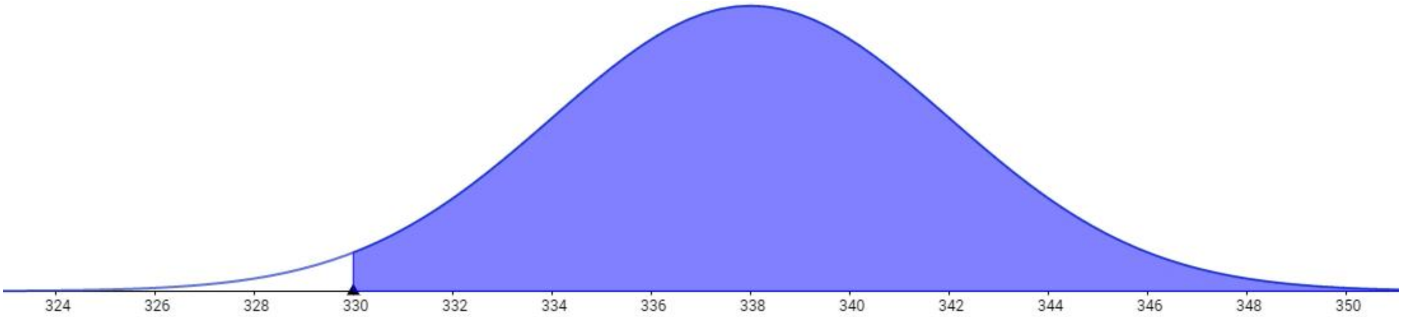
Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, mit der mehr als zweimal Zahl auftritt!

P(mehr als zweimal Zahl) = P(3 mal Z) + P(4 mal Zahl) = $4 \cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}5 + 0{,}5^4 = 0{,}3125$.

**<u>Beispiel 22</u> : (1 Punkt)**
Die Auswertung eines Aufnahmetests ergibt:
Die erreichte Punktezahl ist normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu$ = 80 Punkte und $\sigma$ = 12 Punkte.
In welchem Intervall (symmetrisch um $\mu$) liegen 95% der Ergebnisse? Machen Sie auch eine Skizze!

Intervall : [ 80 – 1,96 · 12 ; 80 + 1,96 · 12 ]  [ 56,48 ; 103,52 ]

**<u>Beispiel 23</u> : (1 Punkt)**
Die Füllmenge von Getränkedosen mit der Aufschrift „330ml“ ist näherungsweise normalverteilt mit dem Mittelwert μ = 338ml und der Standardabweichung σ = 4ml. Der Flächeninhalt des in der Graphik markieren Flächenstücks beträgt etwa 0,977.




Geben Sie eine Interpretation des in der Graphik dargestellten Flächenstücks im inhaltlichen Kontext an!

Interpretation: 97,7% aller Dosen enthalten zumindest 330ml (oder: nur 2,3% der Dosen enthalten weniger als 330ml.

**<u>Beispiel 24</u> : (1 Punkt)**
Um die Essgewohnheiten von Jugendlichen zu untersuchen, wurden 400 Jugendliche eines Bezirks zufällig ausgewählt und befragt. Dabei gaben 240 der befragten Jugendlichen an, täglich zu frühstücken.
Berechnen Sie aufgrund des in der Umfrage erhobenen Stichprobenergebnisses ein 99% Konfidenzintervall für den tatsächlichen (relativen) Anteil p derjenigen Jugendlichen dieses Bezirks, die täglich frühstücken.

Näherungsweises Vertrauensintervall: [0,5369 ;0,66309]

Exakt wäre:[0,535769 ;0,6609]

**Teil II: Erweiterungsstoff (24 Punkte)**

**<u>Beispiel 1</u> : (6 Punkte)**

Trägerraketen ermöglichen es, schwere Nutzlasten in die Erdumlaufbahn zu befördern. Ariane 5 ist die leistungsfähigste europäische Trägerrakete.

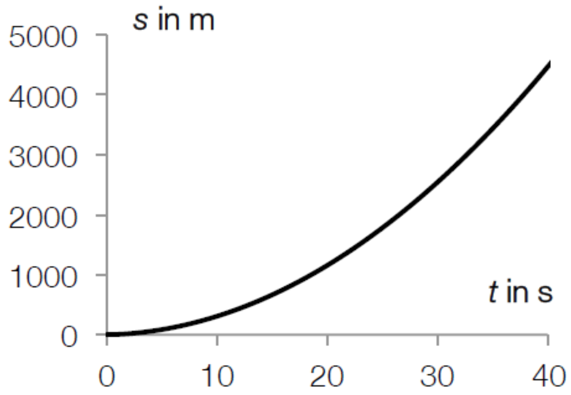
Beim Start der Ariane 5 lässt sich der senkrecht nach oben zurückgelegte Weg s in Abhängigkeit von der Zeit t modellhaft annähernd durch eine quadratische Funktion beschrieben.

**a)** (1 Punkt)
Stellen Sie die allgemeine Funktion s für den gegebenen Zusammenhang auf und ermitteln Sie mithilfe der Werte aus der Tabelle die entsprechenden Parameter der Funktion s!

| t in s | s(t) in m |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 2 | 16,1 |
| 4 | 53,8 |

t….Zeit in Sekunden (s)
s(t)…zurückgelegter Weg in Meter (m) zum Zeitpunkt t

**b)** (2 Punkte)
Folgender Graph beschreibt modellhaft den zurückgelegten Weg s in Abhängigkeit von der Zeit t in der Startphase der Rakete:

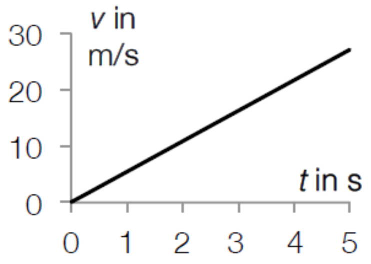



Erklären Sie den Unterschied zwischen der Momentangeschwindigkeit v für den Zeitpunkt $t_0$=30 s und der Durchschnittsgeschwindigkeit $\bar{v}$ für $\Delta t$ = 30s - 0s mithilfe der Begriffe Differenzenquotient und Differentialquotient. **(A)**

Veranschaulichen Sie diese in obiger Graphik!

**c)** (1 Punkt)
Die Beschleunigung der Ariane 5 in der Startphase beträgt etwa 5,4 m/s². Stellen Sie die Funktion für die Beschleunigung, die Geschwindigkeit und den Weg in Abhängigkeit von der Zeit auf!

**d)** (2 Punkte)
Der Graph stellt die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v der Rakete in den ersten 5 Sekunden des Starts dar.




Veranschaulichen Sie die Abhängigkeit der Beschleunigung-Zeit-Funktion a und der Weg-Zeit-Funktion s von der gegebenen Funktion v, indem Sie a und s zeichnen.

Erklären Sie, was man aus der Kenntnis der Eigenschaften des Graphen von v über die Graphen von a und s aussagen kann.

**<u>Beispiel 2</u>: (6 Punkte)**

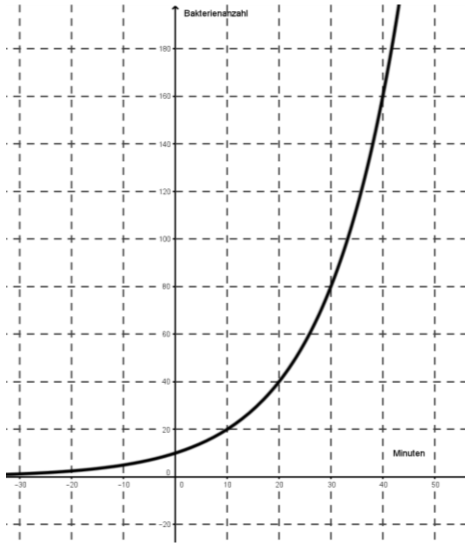
Laut Österreichischem Lebensmittelcodex darf Faschiertes ausschließlich aus frischem Fleisch bestehen, das durch den Fleischwolf gedreht wurde. Durch das Zerkleinern des Fleisches vergrößert sich die Oberfläche und Keime können sich rascher ausbreiten. Somit verdirbt Faschiertes weit schneller als ein Fleischstück im Ganzen. Frisch faschiertes Fleisch soll daher am besten noch am selben Tag verzehrt werden.

a) (1 Punkt)
Gegeben ist ein Fleischstück im Ganzen, das nahezu würfelförmig mit einem Volumen von 1000 $cm^3$ ist. Aus diesem Stück Fleisch wird Faschierte hergestellt. Die Einzelteile des Faschierten sind annähernd zylinderförmig mit dem Durchmesser
d = 0,25 cm und der Höhe h = 0,5 cm.
Um welches Vielfache ist die Oberfläche des gesamten Faschierten größer als die Oberfläche des würfelförmigen Fleischstücks? Kreuzen Sie die zutreffende Antwort an!

| | | |
|---|---|---|
| ❒ ca. 10-Fache | ❒ ca. 1 222-Fache | ❒ ca. 33-Fache |
| ❒ ca. 40 744-Fache | ❒ ca. 19 000-Fache | ❒ ca. 100-Fache |

b) (2 Punkte)
Frisches Faschiertes darf nur am Tag der Herstellung verkauft werden, da sich im Fleisch enthaltene Bakterien (Escherichia coli, Salmonellen und Listerien) rasch vermehren und beim Menschen zu Erkrankungen führen können. Eine gekühlte Lagerung bei höchstens 4°C ist dabei einzuhalten. Auch beim Transport nach Hause soll die Kühlkette nicht unterbrochen werden.
Die Vermehrung der Bakterien ist nahezu exponentiell. Bei ca. 20°C verdoppelt sich die Anzahl der Salmonellen innerhalb von 20 Minuten.
Berechnen Sie die Wachstumskonstante $\lambda$. **(A)**
Stellen Sie die Wachstumsgesetze in zwei verschiedenen Formen auf!

c) (1 Punkt)
Bei hohen Temperaturen vermehren sich die Salmonellen besonders stark. Gegeben ist ein Funktionsgraph, der eine Salmonellenvermehrung in faschiertem Fleisch bei etwa 40°C darstellt.




Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

❐ Laut abgebildetem Graphen wächst die Bakterienpopulation kontinuierlich.

❐ Nach 30 Minuten hat sich die Anzahl der Salmonellen verachtfacht.

❐ Zu Beginn waren keine Salmonellen vorhanden.

❐ Die Anzahl der Bakterien verdoppelt sich alle 10 Minuten.

❐ Die Bakterienanzahl wächst in 10 Minuten um 100%.

d) (1 Punkt)
Die Gattung Salmonella gehört zur Familie Enterobacteriaceae. Salmonellen sind gramnegative, fakultativ anaerobe, fast ausnahmslos bewegliche, gerade Stäbchenbakterien mit einer Größe von 0,7$\mu$m bis 1,5 $\mu$m mal 2,0 $\mu$m bis 5,0 $\mu$m.
Drücken Sie die gegebenen vier Längen in Meter aus!

e) (1 Punkt)
Abgepacktes Faschiertes wird normalerweise in mehreren Fettstufen angeboten, mit rund 12% beim reinen Rindsfaschierten und bis zu 35% Fett beim reinen Schweinsfaschierten.
Ein Kunde kauft ein gemischtes Faschiertes vom Rind und Schwein im Verhältnis 2:3. Berechnen Sie den Fettgehalt von 50 dag gemischten Faschiertem in Prozent!

**<u>Beispiel 3</u>: (6 Punkte)**

Im Zeitraum zwischen 12:35 Uhr und 12:45 Uhr bewegen sich zwei Flugzeuge A und B geradlinig mit jeweils konstanter Geschwindigkeit im Luftraum über einem Flughafen. Die Flugbahnen werden als Geraden in einem dreidimensionalen xyz – Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1 km modelliert. Dabei liegt der Flughafen in der xy – Ebene, der Flughafentower T im Koordinatenursprung, die positive x – Achse weist nach Osten, die positive y – Achse nach Norden und die z – Koordinate gibt die Flughöhe über dem Flughafen an.

Die Positionen der beiden Flugzeuge zu verschiedenen Zeitpunkten sind in folgender Tabelle angegeben:

| | Um 12:35 | Um 12:36 | Um 12:37 |
|---|---|---|---|
| Flugzeug A | (0 /1 / 0,5) | (-4 / 5 / 1,5) | |
| Flugzeug B | (10 / 75 / 7) | | (1/ 63 / 7) |

a) Geben Sie für die Gerade a, auf der die Flugbahn des Flugzeugs A liegt, eine Parameterdarstellung an! **(A)**

b) Geben Sie für die Gerade b, auf der die Flugbahn des Flugzeugs B liegt, eine Parameterdarstellung an und untersuchen Sie rechnerisch, ob die Flugrichtungen der beiden Flugbahnen aufeinander normal stehen!

c) Prüfen Sie rechnerisch, ob sich die Flugbahnen der beiden Flugzeuge schneiden und geben Sie gegebenenfalls ihren Schnittpunkt an!

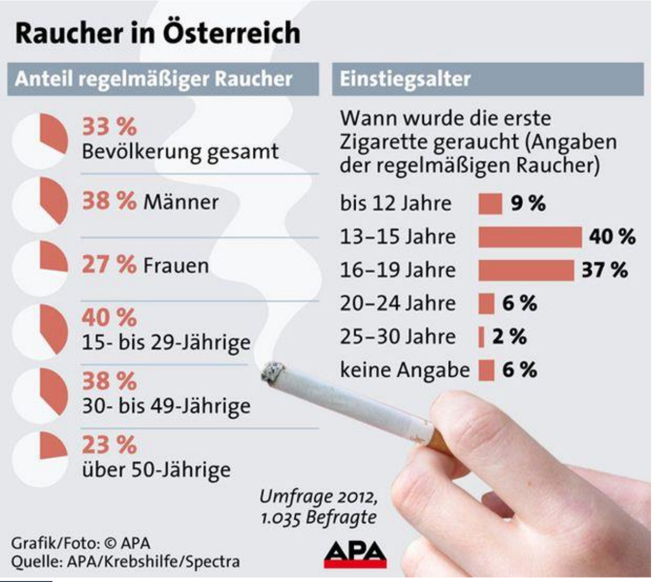
d) Argumentieren Sie, warum die beiden Flugzeuge nicht miteinander kollidieren und berechnen Sie, wie weit das Flugzeug B noch vom Schnittpunkt der Flugbahnen entfernt ist, wenn das Flugzeug A diesen Punkt gerade erreicht!

e) Begründen Sie, warum sich das Flugzeug A zwischen 12:35 und 12:45 im Steigflug befindet und berechnen Sie den Steigungswinkel der Flugbahn des Flugzeugs A! (Das ist der Winkel zwischen der Flugbahn und der xy – Ebene).

f) Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit des Flugzeugs A zwischen 12:35 Uhr und 12:45 Uhr in km/h!

**<u>Beispiel 4</u>: (6 Punkte)**

„Österreich raucht jung und regelmäßig“ – Unter diesem Titel wurde in der „Presse“ das Rauchverhalten der österreichischen Bevölkerung analysiert. Dabei wurden die Ergebnisse einer Umfrage unter 1035 Befragten verwendet. In der nebenstehenden Graphik sind einige wichtige Kernaussagen zusammengefasst.




a) Wie groß ist der relative Anteil der Frauen in der Stichprobe, deren Einstiegsalter bei höchstens 15 Jahren liegt? **(A)**

b) Ergänzen Sie aufgrund der vorliegenden Daten die folgende Vierfeldertafel!

| | Raucher | Nichtraucher | Summe |
|---|---|---|---|
| Männer | | | 520 |
| Frauen | | | |
| Summe | | | 1035 |

c) Der Anteil regelmäßiger RaucherInnen in der Altersklasse „15- bis 29-Jährige“ wurde in der Stichprobe mit 40% erhoben. Wir wollen annehmen, dass dieser Wert der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit entspricht. Wie groß wäre unter dieser Annahme die Wahrscheinlichkeit, dass sich in einer zufällig ausgewählten österreichischen Maturaklasse mit 20 Schülern weniger als 3 RaucherInnen befinden?

d) Aus detaillierten Untersuchungen zum Einstiegsalter geht hervor, dass dieses annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 15{,}5$ Jahre und der Standardabweichung $\sigma = 2{,}6$ Jahre ist. Wie hoch ist der Anteil der RaucherInnen, die bei ihrer ersten Zigarette jünger als 12 Jahre waren? Vergleichen Sie diesen Wert mit dem Wert in der Umfrage!

e) Die vorliegende Umfrage unter 520 Männern ergab einen Raucheranteil von 38%. Im Auftrag des Gesundheitsministeriums wurde ein Konfidenzintervall [0,338 ; 0,422] für den Raucheranteil österreichweit ermittelt.
Wie hoch ist die statistische Sicherheit dieser Angabe?

f) Repräsentative Stichprobenauswahl vorausgesetzt, ist der Stichprobenumfang (n = 520) relativ groß. Erklären Sie die Auswirkungen auf das Vertrauensintervall, wenn dieses für dieselbe relative Häufigkeit aus einem geringeren Stichprobenumfang (etwa n = 200) bei gleich hoher geforderter statistischer Sicherheit bestimmt werden soll!

Viel Erfolg!

## Lösungen:

**Beispiel 1:**

a) Aufstellen der allgemeinen Gleichung einer quadratischen Funktion:
$s(t) = at^2 + bt + c$

Aufstellen eines Gleichungssystems:

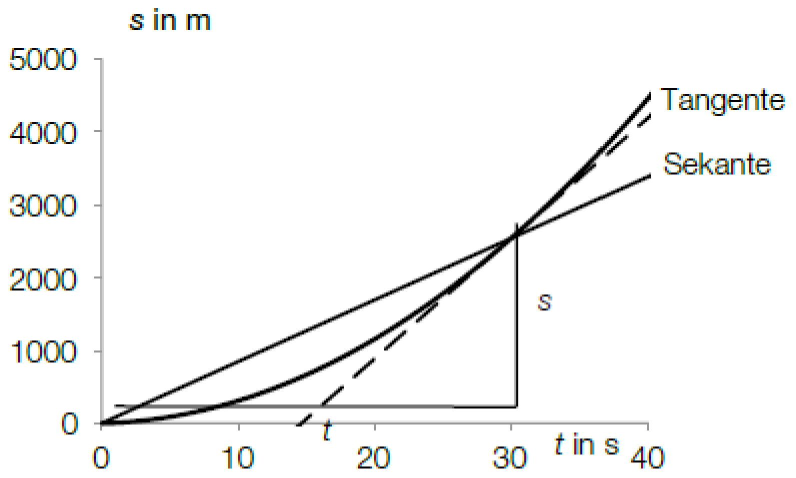
I: $c = 0$
II: $4a + 2b = 16{,}1$
III: $16a + 4b = 53{,}8$

Lösen des linearen Gleichungssystems:

$a = 2{,}7$, $b = 2{,}65$, $c = 0$
$s(t) = 2{,}7t^2 + 2{,}65t$

*Alternative Lösungen über Datenfit-Routine sind auch zulässig,*
*z. B. mit GeoGebra: TrendPoly {Liste von Punkten; Grad der Funktion}.*

b)




$\overline{v}(t) = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ ... Steigung der Sekante, Differenzenquotient

Die Durchschnittsgeschwindigkeit ist der Differenzenquotient aus Wegdifferenz durch Zeitdifferenz. (In diesem Fall ist $\Delta t = 30$ s, $\Delta s$ errechnet man aus der Funktionsgleichung.)

$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = s'(t)$ … Steigung der Tangente, Differenzialquotient

Die Momentangeschwindigkeit erhält man durch die Bildung des Grenzwerts des Differenzenquotienten, wobei man $\Delta t$ gegen 0 streben lässt. Der Differenzialquotient ist die erste Ableitung des Weges nach der Zeit und die Steigung der Tangente an der Stelle $t = 30$ s.

c) $a(t) = 5{,}4$

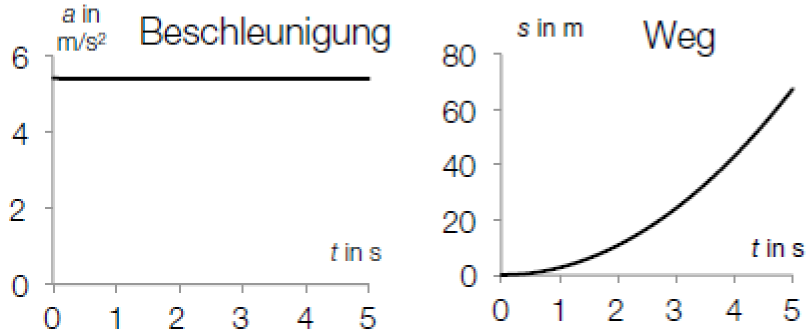
$v(t) = \int 5{,}4\,dt = 5{,}4t + C_1$

$s(t) = \int (5{,}4t + C_1)\,dt = 2{,}7t^2 + C_1 t + C_2$

$C_2 = 0$, da der zurückgelegte Weg zum Zeitpunkt $t = 0$ gleich 0 ist.
$C_1 = 0$, da die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ gleich 0 ist.

$v(t) = 5{,}4t$
$s(t) = 2{,}7t^2$

d)




*a* ist die Steigungsfunktion von *v*. Da die Geschwindigkeit linear steigt, ist die Beschleunigung konstant, und der Graph von *a* ist eine waagrechte Gerade.

*v* ist die Steigungsfunktion von *s*. Da die Geschwindigkeit linear zunimmt, steigt der Weg mit dem Quadrat der Zeit, und *s* ist eine quadratische Funktion.

**Beispiel 2:**

**Teil a**

- ☐ ca. 10-Fache
- ☐ ca. 1 222-Fache
- ☒ ca. 33-Fache
- ☐ ca. 40 744-Fache
- ☐ ca. 19 000-Fache
- ☐ ca. 100-Fache

$V(\text{Würfel}) = a^3 = 1\,000\text{ cm}^3 \quad \Rightarrow \quad a = 10\text{ cm}$
$O(\text{Würfel}) = 6 \cdot a^2 \quad \Rightarrow \quad O(\text{Würfel}) = 600\text{ cm}^2$

$O(\text{Zylinder}) = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h + 2 \cdot r^2 \cdot \pi$
$O(\text{Zylinder}) = 0{,}25\text{ cm} \cdot \pi \cdot 0{,}5\text{ cm} + 2 \cdot (0{,}125\text{ cm})^2 \cdot \pi \approx 0{,}490873852\text{ cm}^2$

$V(\text{Zylinder}) = r^2 \cdot \pi \cdot h$
$V(\text{Zylinder}) = (0{,}125\text{ cm})^2 \cdot \pi \cdot 0{,}5\text{ cm} \approx 0{,}024543693\text{ cm}^3$

Der Quotient V(Würfel) : V(Zylinder) gibt die Anzahl der Zylinder, die in den Würfel passen, an:
$1\,000 : 0{,}024543693 \approx 40\,743{,}665$
Das sind ca. 40 743 kleine Zylinder.

Anzahl der Zylinder mal die Oberfläche des einzelnen Zylinders ergibt die gesamte Oberfläche des Faschierten:
$40\,743{,}665 \cdot 0{,}490873852 \approx 20\,000{,}000$

Diese Gesamtoberfläche des Faschierten wird nun durch die Oberfläche des Fleisches im Ganzen dividiert, um das Vielfache zu erhalten:
$20\,000{,}000 : 600 \approx 33{,}33$
Das ist ca. die **33fache** Oberfläche.

**Teil b** $N(t) = N(0) \cdot e^{\lambda t}$

$$N(20) = 2 \cdot N(0) = N(0) \cdot e^{\lambda \cdot 20} \quad \Big| \text{durch } N(0) \neq 0 \text{ dividieren}$$

$$2 = e^{\lambda \cdot 20} \quad \Big| \text{logarithmieren (Hinweis: } \ln e = 1)$$

$$\ln 2 = \lambda \cdot 20 \quad \Big| :20$$

$$\boldsymbol{\lambda \approx 0{,}034657359}$$

$\boldsymbol{N(t) = N(0) \cdot e^{0{,}03466 \cdot t}}$ (t in Minuten)

**Teil c**

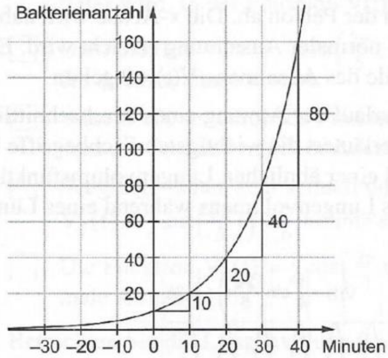
☒ Laut abgebildetem Graphen wächst die Bakterienpopulation kontinuierlich.

☒ Nach 30 Minuten hat sich die Anzahl der Salmonellen verachtfacht.

☐ Zu Beginn waren keine Salmonellen vorhanden.

☒ Die Anzahl der Bakterien verdoppelt sich alle 10 Minuten.

☒ Die Bakterienanzahl wächst in 10 Minuten um 100 %.




$f(0) = 10$ Bakterien

Das Wachstum von $t = 10$ auf $t = 20$, also die Differenz von $f(20) - f(10)$, beträgt 20 Bakterien, bei $f(30) - f(20)$ sind es 40 und bei $f(40) - f(30)$ sind es 80 Bakterien.

Somit verdoppeln sich die Bakterien kontinuierlich alle 10 Minuten. Das ist ein Zuwachs von 100 %.

**Teil d**

$0{,}7\ \mu m = 0{,}000\,0007$ m

$1{,}5\ \mu m = 0{,}000\,0015$ m

$2{,}0\ \mu m = 0{,}000\,002$ m

$5{,}0\ \mu m = 0{,}000\,005$ m

Dies sind rationale Zahlen, insbesondere auch reelle und komplexe.

☐ $\mathbb{N}$

☐ $\mathbb{Z}$

☒ $\mathbb{Q}$

☒ $\mathbb{R}$

☒ $\mathbb{C}$

**Teil e** 50 dag im Verhältnis 2 : 3 auf Rind- und Schweinefleisch aufgeteilt ergibt 20 dag Rindfleisch und 30 dag Schweinefleisch.

20 dag Rindfleisch haben 12 % von 20 dag Fett.
Das sind $\frac{12}{100} \cdot 20 = 2{,}4$ dag Fett.

30 dag Schweinefleisch haben 35 % von 30 dag Fett.
Das sind $\frac{35}{100} \cdot 30 = 10{,}5$ dag Fett.

Zusammen sind das 12,9 dag Fett in 50 dag Faschiertem, das entspricht **25,8 %**:

$12{,}9 \cdot \frac{100}{50} = 25{,}8$

**Beispiel 3:**

a) a: X = (0 | 1 | 0,5) + t ·(-4 | 4 | 1)

b) b: X = (10 | 75 | 7) + s · (-9 | -12 | 0)

Stehen nicht aufeinander normal, da das Skalarprodukt der Richtungsvektoren nicht 0 ergibt.

c) -4t = 10 – 9s

1 + 4t = 75 – 12s

0,5 + t = 7. Daraus: t=6,5. Einsetzen in die 2. Gleichung:

1 + 26 = 75 – 12s

27 = 75 – 12s  und s= 4.

Einsetzen in die 1. Gleichung: -26 = 10 – 36. Wahre Aussage. Schnittpunkt bei

S(-26 | 27 | 7)

d) Kollidieren nicht, da Flugzeug A nach 6,5 Minuten den Schnittpunkt S erreicht, Flugzeug B erst nach 8 Minuten.

Flugzeug B befindet sich nach 6,5 Minuten an der Position P(- $^{77}/_{4}$ | 36 | 7).

Die Entfernung vom Schnittpunkt S beträgt 11,25km.

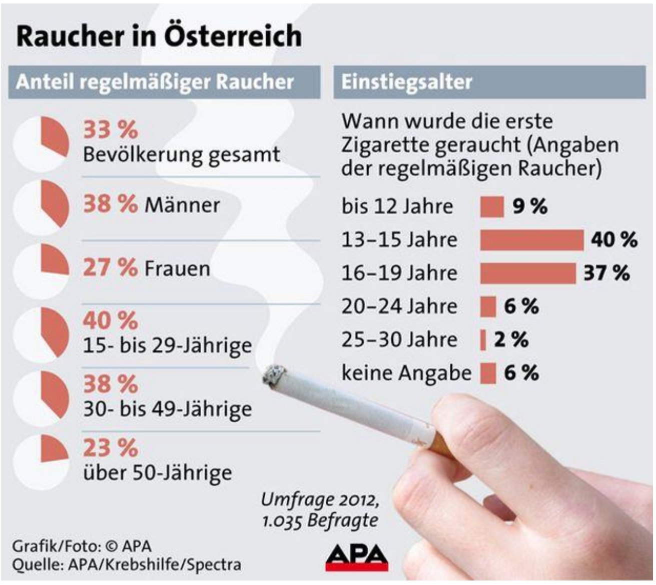
e) Flugzeug A befindet sich im Steigflug, das die z- Koordinaten zunimmt.

Steigungswinkel ca. 10,02°

f) mittl. Geschwindigkeit: 5,74 $^{km}/_{min}$ oder ca. 345 $^{km}/_{h}$.

**Beispiel 4:**

„Österreich raucht jung und regelmäßig“ – Unter diesem Titel wurde in der „Presse“ das Rauchverhalten der österreichischen Bevölkerung analysiert. Dabei wurden die Ergebnisse einer Umfrage unter 1035 Befragten verwendet. In der nebenstehenden Graphik sind einige wichtige Kernaussagen zusammengefasst.




a) (A) Wie groß ist der relative Anteil der Frauen in der Stichprobe, deren Einstiegsalter bei höchstens 15 Jahren liegt?

[0,49 · 0,27 = 0,1323, ca. 13,2%]

b) Ergänze aufgrund der vorliegenden Daten die folgende Vierfeldertafel!

| | Raucher | Nichtraucher | Summe |
|---|---|---|---|
| Männer | 198 | 322 | 520 |
| Frauen | 139 | 376 | 515 |
| Summe | 337 | 698 | 1035 |

c) Der Anteil regelmäßiger RaucherInnen in der Altersklasse „15- bis 29-Jährige" wurde in der Stichprobe mit 40% erhoben. Wir wollen annehmen, dass dieser Wert der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit entspricht. Wie groß wäre unter dieser Annahme die Wahrscheinlichkeit, dass sich in einer zufällig ausgewählten österreichischen Maturaklasse mit 20 Schülern weniger als 3 RaucherInnen befinden?

[Binomialverteilung mit n=20, p=0,4

$P(X<3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 0{,}6^{20} + 20 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^{19} + 190 \cdot 0{,}4^{2} \cdot 0{,}6^{18} =$

0,00003656 + 0,000487 + 0,00308 = 0,0036, also ca. 0,36%.

d) Aus detaillierten Untersuchungen zum Einstiegsalter geht hervor, dass dieses annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu$=15,5 Jahre und der Standardabweichung $\sigma$=2,6 Jahre ist. Wie hoch ist der Anteil der RaucherInnen, die bei ihrer ersten Zigarette jünger als 12 Jahre waren? Vergleiche diesen Wert mit dem Wert in der Umfrage!

Man berechnet z= (12 – 15,5) / 2,6 = - 1,346 und damit $P(x \leq 12) = 0{,}089$, also ca. 8,9%. Der Wert stimmt ausgezeichnet mit dem Umfrageergebnis überein!

e) Die vorliegende Umfrage unter 520 Männern ergab einen Raucheranteil von 38%. Im Auftrag des Gesundheitsministeriums wurde ein Konfidenzintervall [0,338 ; 0,422] für den Raucheranteil österreichweit ermittelt. Wie hoch ist die statistische Sicherheit dieser Angabe?

Es gilt: 0,338 = 0,38 + z $0{,}338 = 0{,}38 + z \cdot \sqrt{\frac{0{,}38 \cdot 0{,}62}{520}}$ Daraus bestimmt man z=1,9731 und damit die statistische Sicherheit mit 95,15 %.

f) Repräsentative Stichprobenauswahl vorausgesetzt, ist der Stichprobenumfang (n=520) relativ groß. Erkläre die Auswirkungen auf das Vertrauensintervall, wenn dieses für dieselbe relative Häufigkeit aus einem geringeren Stichprobenumfang (etwa n=200) bei gleich hoher geforderter statistischer Sicherheit bestimmt werden soll!

[Vertrauensintervall wäre breiter!]