1. Mathematikschularbeit 8a
14.12.2017

Name: ______________________________

Punkte: ______________________________

Note: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Punkteschlüssel

Note	Sehr Gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht Genügend
Punkte	36-31	30-25	24-18	17-12	< 12

wobei jeweils zumindest 12 Grundkompetenzpunkte erreicht werden müssen!

Viel Erfolg!

	Teil 1	Teil 2	Teil 2 / Komp. Teil 1	Gesamtpunkte
Punkte	__/18P	__/18P	__/3P	__/36P

Hinweise:

- **Teil 1** prüft „das Wesentliche“ ausgewählter Themenbereiche. Die Aufgaben in Teil 1 werden mit insgesamt 18 Punkten bewertet, jede Teilaufgabe mit 1 Punkt. Um eine positive Beurteilung zu erhalten, sind in jedem Fall zumindest $^{2}/_{3}$ der Punkte in diesem Bereich - das sind 12 Punkte - zu erreichen.
- **Teil 2** folgt und wird getrennt von Teil 1 bearbeitet.

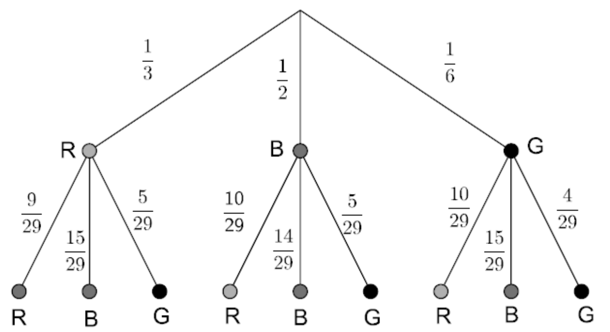
Teil I: Grundkompetenzen (18 Punkte)

Beispiel 1: (1 Punkt)
Ein Zufallsexperiment wird durch eine binomialverteilte Zufallsvariable X beschrieben. Diese hat die Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0{,}36$ und die Standardabweichung $\sigma = 7{,}2$.

Berechnen Sie den zugehörigen Parameter n (Anzahl der Versuche)!

n= 225

Beispiel 2: (1 Punkt)
In einem Gefäß befinden sich rote, blaue und grüne Kugeln. Es werden zwei Kugeln gezogen.
Das folgende Baumdiagramm veranschaulicht die möglichen Ergebnisse des Zufallsversuchs:



R = rote Kugel
B = blaue Kugel
G = grüne Kugel

Quelle: http://www.mathe-online.at/mathint/wstat1/grafiken/baumdiagramm2.gif [18.12.2014] (adaptiert)

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine rote Kugel gezogen wird!

P(mindestens eine rote Kugel) = 1 – P(keine rote Kugel) = P(b,b) + P(b,g) + P(g,b) + P(g,g) =
0,56321

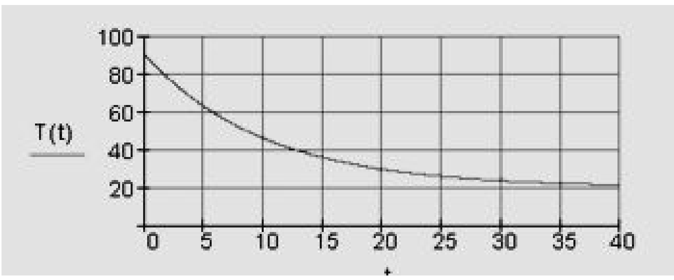
<u>Beispiel 3</u>: (1 Punkt)
Eine Firma betreibt insgesamt 8 Kopiergeräte, die völlig unabhängig voneinander verwendet werden können. Die Betriebsbereitschaft der einzelnen Geräte wird dabei durch eine grüne Kontrolllampe am Gerät angezeigt. Zu einem zufällig ausgewählten Zeitpunkt leuchtet die grüne Kontrolllampe mit einer Wahrscheinlichkeit von 85%. Ist das Gerät nicht betriebsbereit (Papierstau, kein Papier, kein Toner), wechselt die Farbe der Kontrolllampe auf rot.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zu einem zufälligen Zeitpunkt nicht mehr als 2 Kopiergeräte betriebsbereit sind?

$P(X<3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 0{,}00024$

<u>Beispiel 4</u>: (1 Punkt)
Gegeben sind fünf Gleichungen mit der Unbekannten t und verschiedenen Parametern.
Kreuzen Sie die beiden linearen Gleichungen an!

freier Fall: $s = \frac{g}{2} \cdot t^2$	□
senkrechter Wurf: $h = v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$	□
gleichmäßig beschleunigte Rotation: $\omega = \alpha \cdot t + \omega_0$	■
gleichmäßig beschleunigte Kreisbewegung: $\varphi = \frac{\omega \cdot t}{2}$	■
Leistung: $P = \frac{W}{t}$	□

<u>Beispiel 5</u>: (1 Punkt)
Ein Pudding kühlt nach seiner Zubereitung ab. Der Term $T(t) = 20 + 70e^{-0{,}1t}$, $t \geq 0$
(t in Minuten, T(t) in Grad Celsius) beschreibt den Abkühlungsvorgang. Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion T(t).

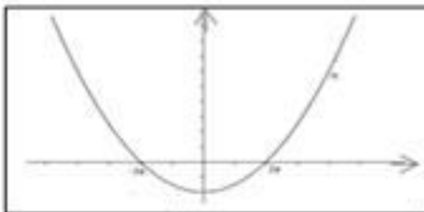
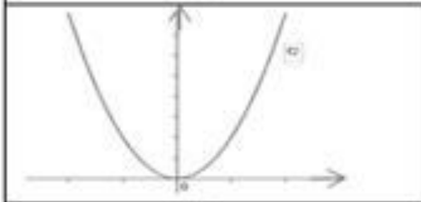
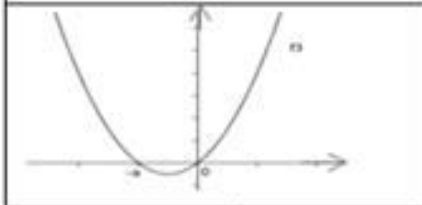
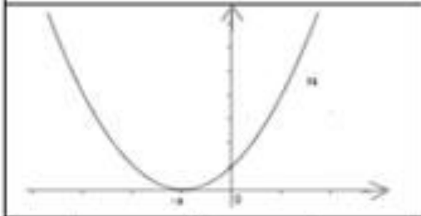
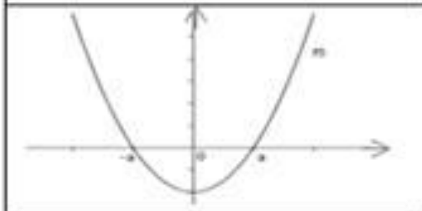
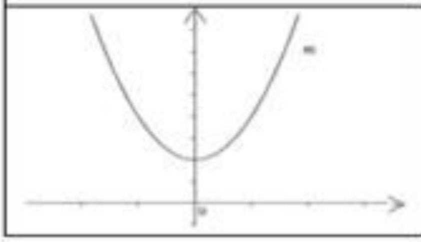


Berechnen Sie für die ersten 10 Minuten die durchschnittliche Temperaturänderung!

$$\overline{T} = \frac{T(10) - T(0)}{10} = -4{,}42°C/\min \ .$$

Beispiel 6: (1 Punkt)
Gegeben sind vier quadratische Gleichungen mit der Variablen x mit x ∊ R und dem Parameter a mit a ∊ N (a ≠ 0). Die Deutung der Lösungen quadratischer Gleichungen kann anhand der Graphen entsprechender Funktionen erfolgen.
Ordnen Sie den vier quadratischen Gleichungen jeweils die Grafik zu, die die Ermittlung der Lösungen auf grafischem Weg veranschaulicht!

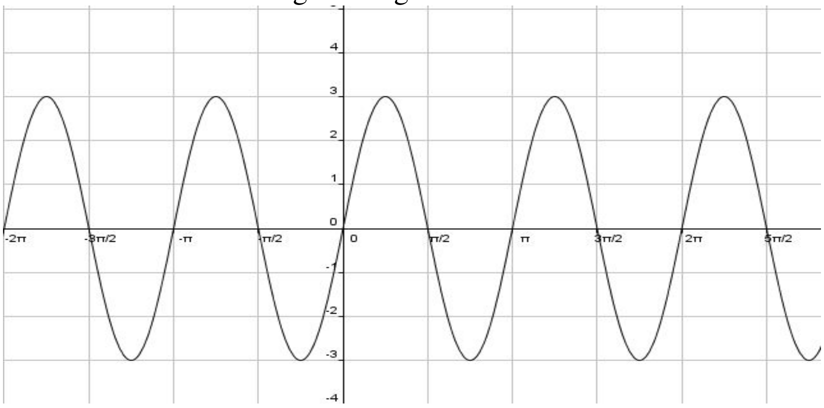
$ax^2 = 0$	B
$x^2 + 4a^2 = 0$	F
$x^2 + ax = 0$	C
$x^2 - a^2 = 0$	E

	A
	B
	C
	D
	E
	F

Beispiel 7: (1 Punkt)
Kolibakterien vermehren sich pro Minute um 4,4%. Berechnen Sie die Zeit, in der sich ihr Bestand verdoppelt hat!

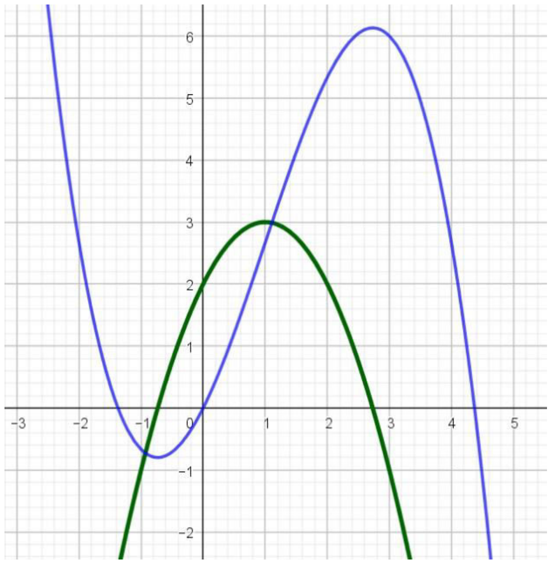
Lösung : t=16,09 min.

Beispiel 8: (1 Punkt)
Gegeben ist der Graph einer Sinusfunktion f mit f(x) = a · sin (b·x) mit a, b ∈ **R**.
Geben Sie die Funktionsgleichung an!



f(x)= 3 sin(2x)

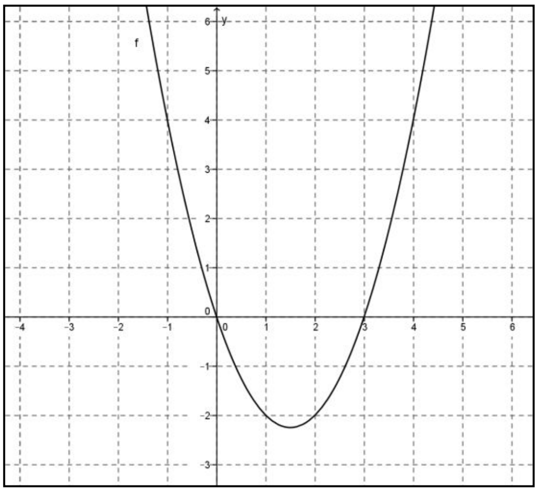
Beispiel 9: (1 Punkt)
Skizzieren Sie zum Graphen der Funktion f einen Graphen einer Stammfunktion F!



Beispiel 10: (1 Punkt)
Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

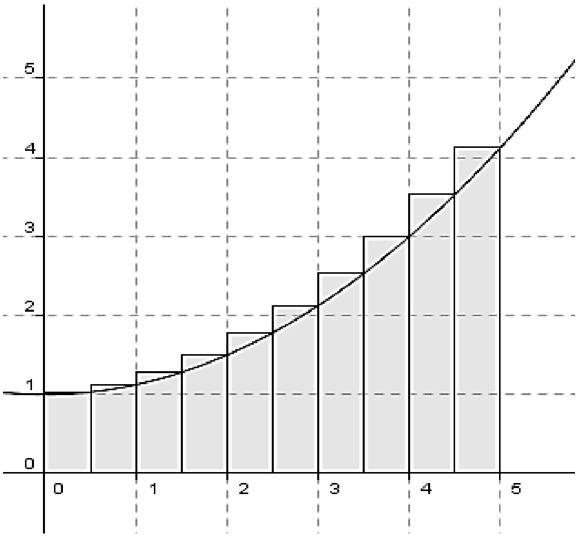
Die Steigung der Sekante im Intervall $[x_0; x_0 + \Delta x]$ wird durch $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ angegeben.	☐
Die Momentangeschwindigkeit eines Körpers entspricht der momentanen Änderungsrate der Beschleunigung.	☐
Die durchschnittliche Geschwindigkeit im Intervall $[x_0; x_0 + \Delta x]$ wird durch $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ angegeben.	☐
In einem Weg – Zeit – Diagramm entspricht die Durchschnittsgeschwindigkeit im Zeitintervall $[t_0; t_2]$ der Steigung der entsprechenden Sekante.	■
Die Momentanbeschleunigung eines Körpers entspricht der momentanen Änderungsrate der Geschwindigkeit.	■

Beispiel 11: (1 Punkt)
Färben Sie jene Fläche im vorgegebenen Koordinatensystem an, die der Funktionsgraph f(x) im Intervall [-1; 4] mit der x - Achse im einschließt! Geben Sie eine allgemeine Formel für den Inhalt dieses Flächenstückes an!



$$A = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \left|\int_{0}^{3} f(x)dx\right| + \int_{3}^{4} f(x)dx$$

Beispiel 12: (1 Punkt)
In der nachstehenden Abbildung sind der Graph einer Polynomfunktion f sowie ein aus 10 gleich breiten Rechtecken bestehendes, grau gefärbtes Flächenstück dargestellt. Der Flächeninhalt des grau gefärbten Flächenstücks wird mit A bezeichnet.
Kreuzen Sie die beiden für die gegebene Abbildung zutreffenden Aussagen an!



$\int_{2,5}^{5} f(x)dx < \int_{0}^{2,5} f(x)dx$	□
$\int_{0}^{5} f(x)dx < A$	■
$\int_{0}^{2,5} f(x)dx = \frac{A}{2}$	□
$\int_{0}^{5} f(x)dx > 2 \cdot A$	□
$\int_{4}^{5} f(x)dx > \frac{A}{5}$	■

Beispiel 13: (1 Punkt)
Ein Betrieb arbeitet mit der Kostenfunktion $K(x) = 0,1x^2 + 0,1x + 2$. Dabei gibt x die erzeugte Menge in Stück an. Der Preis p in Abhängigkeit von der Menge x kann durch die Funktion $p(x) = -0,28x + 3,2$ beschrieben werden.
Berechnen Sie jenes Intervall für die Produktionsmenge x, in dem der Betrieb einen Gewinn erwirtschaftet!

$E(x) = -0,28x^2 + 3,2x$, daher [0,706 ; 7,45]

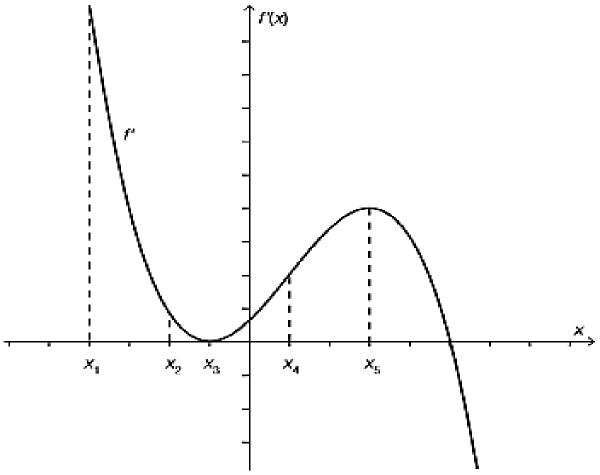
Beispiel 14: (1 Punkt)
Ein Auto fährt mit konstanter Geschwindigkeit und beschleunigt ab dem Zeitpunkt t = 0. Für seine Geschwindigkeit v in m/s gilt für die nächsten 4 Sekunden:

$$v(t) = 22 + 4t \quad (0 \leq t \leq 4)$$

Kreuzen Sie die beiden für die Bewegung dieses Autos zutreffenden Aussagen an!

$v'(3)$ gibt die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t = 3 an.	☐
$v(3) - v(2)$ gibt die mittlere Geschwindigkeit für $2 \leq t \leq 3$ an.	☐
Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t = 0 wird mit v(0) berechnet.	■
Mit $\int_0^4 v(t)\,dt$ kann man die Beschleunigungsstrecke berechnen.	■
Die Beschleunigung des Autos nimmt im betrachteten Zeitraum zu.	☐

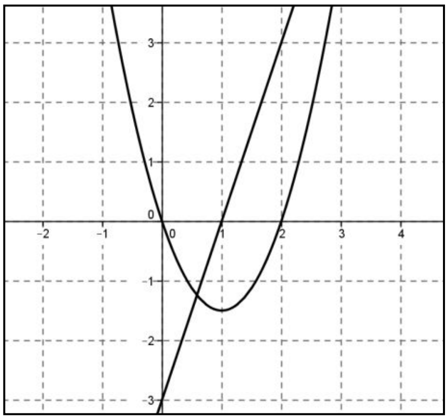
Beispiel 15: (1 Punkt)
In der untenstehenden Abbildung ist der Graph einer Ableitungsfunktion f ´ einer Polynomfunktion f vierten Grades dargestellt.



Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an:

Jede Funktion f mit der Ableitungsfunktion f ´ hat an der Stelle x_5 eine horizontale Tangente.	☐
Es gibt eine Funktion f mit der Ableitungsfunktion f ´, deren Graph durch den Punkt P=(0|0) verläuft.	■
Jede Funktion f mit der Ableitungsfunktion f ´ ist im Intervall $[x_1; x_2]$ streng monoton fallend.	☐
Jede Funktion f mit der Ableitungsfunktion f ´ ist im Intervall $[x_3; x_4]$ streng monoton steigend.	■
Die Funktionswerte f(x) jeder Funktion f mit der Ableitungsfunktion f ´ sind für $x \in [x_3; x_5]$ stets positiv.	☐

<u>Beispiel 16</u>: (1 Punkt)
Von einer Funktion f sind die Graphen der Ableitungsfunktionen von f ´(x) und f ´´(x) gegeben.
Lesen Sie aus den Graphen die Extremstelle(n) und die Wendestelle(n) der Funktion f(x) ab und geben Sie die jeweiligen <u>Stellen</u> an!



Extremstelle(n) (Maximum oder Minimum?):
Maximum bei x=0, Minimum bei x=2
Wendestelle(n):

Wendepunkt bei x=1

<u>Beispiel 17</u>: (1 Punkt)
Eine 20cm hohe Blumenvase besitzt in jeder Höhe eine annähernd kreisförmige Schnittfläche. Der Radius r (in cm) der Schnittfläche kann in Abhängigkeit von der Höhe h durch die Funktion
$r(h) = {}^{1}/_{4}\, h + 4$ beschrieben werden.

Stellen Sie eine Formel für das Volumen der bis zur halben Höhe gefüllten Vase auf und berechnen Sie dieses Volumen!

$$V = \pi \cdot \int_{0}^{10} (r(h))^2\, dh = 882{,}26 cm^3$$

<u>Beispiel 18</u>: (1 Punkt)
Berechnen Sie den Inhalt jenes Flächenstücks, das die Graphen der Funktionen $f(x) = x^2 - 4x$ und $g(x) = 2x - 5$ miteinander einschließen!

$$A = \int_{1}^{5} g(x) - f(x) dx = 10{,}66 FE$$

Teil II: Erweiterungsstoff (18 Punkte)

Beispiel 1: (5 Punkte)

Ein LKW beschleunigt aus dem Stand (v(0) = 0, s(0) = 0) bis zu seiner Höchstgeschwindigkeit (danach findet keine weitere Beschleunigung statt, also a = 0). Die Beschleunigung a konnte empirisch ermittelt werden und lässt sich annähernd durch folgende Funktion beschreiben:

$$a(t) = \frac{t^2}{8100} - \frac{t}{45} + 1 \quad (m/s^2, \text{ t Sekunden nach dem Start})$$

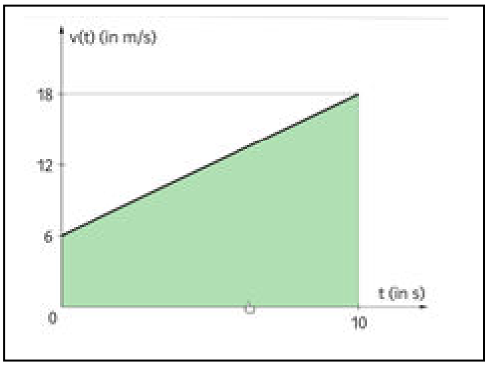
a) Wie lange dauert der Beschleunigungsvorgang? (t=90s)

b)**(A)** Bestimme die Geschwindigkeitsfunktion v(t) und gib die Höchstgeschwindigkeit in km/h an!

Höchstgeschwindigkeit: 108 $^{km}/_{h}$.

c) Gib eine Funktion s(t) an, die den zurückgelegten Weg in Abhängigkeit von der Zeit t beschreibt! Bestimme die Länge des zurückgelegten Weges bis zum Erreichen der Höchstgeschwindigkeit! (2025m)

d) In der nebenstehenden Abbildung ist die Geschwindigkeit v eines LKWs in Abhängigkeit von der Zeit t dargestellt. Was gibt der Inhalt der grauen Fläche an? Wie groß ist die Beschleunigung des LKWs im angegebenen Zeitintervall?



Fläche gibt den zurückgelegten Weg an!

Beschleunigung des LKW: 1,2 $^{m}/_{s}{}^{2}$

e) Wie ändert sich der Graph von v, wenn der LKW mit gleicher Beschleunigung, aber mit der Ausgangsgeschwindigkeit 9m/s fährt? Ermittle rechnerisch, nach welcher Zeit in diesem Fall die Geschwindigkeit von 18 m/s erreicht wird!

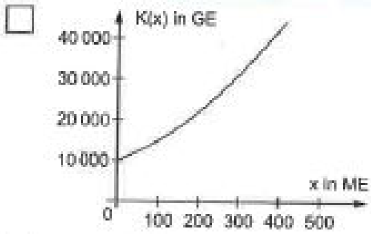
Graph wird entlang der y-Achse verschoben. Höchstgeschwindigkeit wird nach 7,5 Sekunden erreicht!

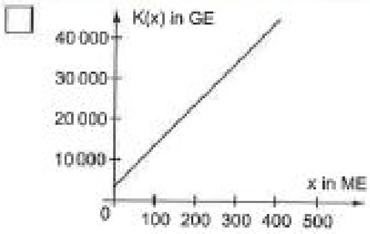
Beispiel 2: (5 Punkte)

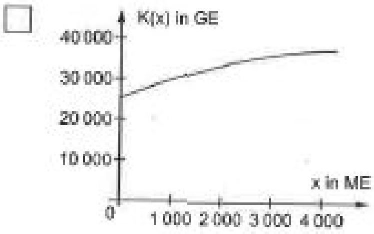
a) Gegeben sind die Begriffe und drei Graphen einer Kostenfunktion.
Ordnen Sie den Funktionsgraphen die passende Beschreibung zu! **(A)**

A linearer Kostenverlauf	**B** degressiver Kostenverlauf	**C** fixer Kostenverlauf
D regressiver Kostenverlauf	**E** progressiver Kostenverlauf	**F** proportionaler Kostenverlauf

[E, A, B]





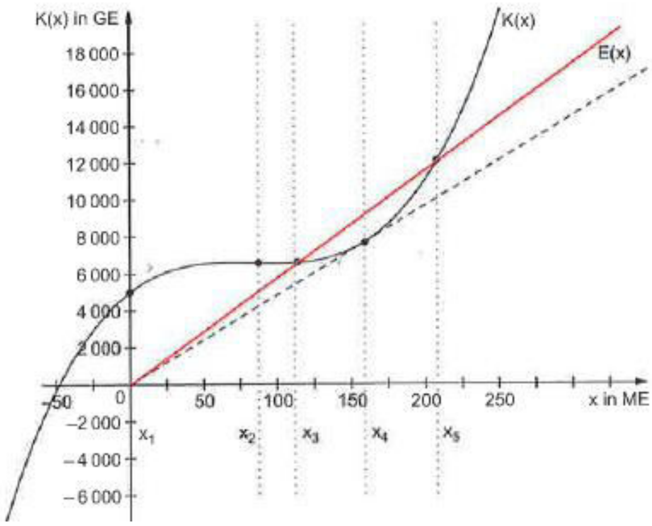


b)

Gegeben ist der Graph einer Kostenfunktion K(x). Einige Punkte des Funktionsgraphen und ihre zugehörigen x - Werte sind markiert. Ordnen Sie den Werten K(x) die entsprechende Bedeutung der Kostenfunktion zu!

$K(x_1)$	F
$K(x_2)$	C
$K(x_3)$	D
$K(x_4)$	A
$K(x_5)$	G

A	Betriebsoptimum (minimale Stückkosten)
B	Grenzkosten
C	Kostenkehre
D	Gewinnschwelle (Break - Even - Point)
E	Maximale Kosten
F	Fixkosten
G	Gewinngrenze



c) Ermitteln Sie aus der oberen Grafik jene(n) Bereich(e), in dem / in denen die Produktion Verluste macht und geben Sie diese(n) näherungsweise an!

Gewinn für 0< x<110 und x>208

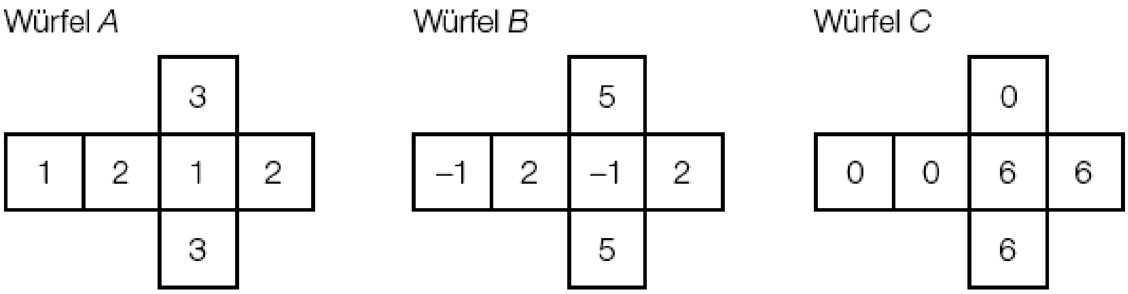
d) Von einer Produktionsfirma kennt man die Kostenfunktion
$K(x) = x^3 - 15x^2 + 250x + 5000$. Der Nachfragepreis beträgt p = 1480 GE/ME.
Kreuzen Sie die <u>nicht</u> zutreffende(n) Aussage(n) zur obigen Angabe an!

$E(x) = 1480x$	
$G(x) = -x^3 + 15x^2 + 1230x - 5000$	
$G(x) = x^3 - 15x^2 - 1230x + 5000$	■
Der maximale Gewinn wird bei 20 ME erzielt.	■
Die Kostenkehre befindet sich bei 5 ME.	

e) Die Standgebühr auf einem Weihnachtsmarkt in Wien kostet 3500 €.
Der Weihnachtsmarkt ist vom 14.11. 2017 bis zum 24.12. 2017 geöffnet.
Ein Becher Punsch kostet den Standbetreiber 90 Cent. Er verkauft den Becher Punsch um 3,5 €. Berechnen Sie den Break - Even - Point! Interpretieren Sie ihn in diesem Zusammenhang!

$K(x) = 0{,}9x + 3500$ und $E(x) = 3{,}5x$. Daraus x=1346,15, er muss daher mindestens 1347 Becher verkaufen!

<u>Beispiel 3:</u> (4 Punkte)
Gegeben sind die Netze von drei fairen Würfeln, deren Seitenflächen auf unterschiedliche Weise mit verschiedenen Zahlen beschriftet sind. (Ein Würfel ist „fair", wenn die Wahrscheinlichkeit, nach einem Wurf nach oben zu zeigen, für alle Seitenflächen gleich groß ist.)



a) Herr Fischer wirft Würfel *A* zweimal. Die Zufallsvariable *X* gibt die Summe der beiden geworfenen Zahlen an. Die Zufallsvariable *X* kann die Werte 2, 3, 4, 5 und 6 annehmen.
Frau Fischer wirft die Würfel *A* und *B*. Die Zufallsvariable *Y* gibt die Summe der beiden geworfenen Zahlen an.

Geben Sie für die Zufallsvariable *Y* alle möglichen Werte an!

mögliche Werte für *Y*: 0,1,2,3,4,5,6,7,8

b) Bei einem Spiel wird Würfel *B* dreimal geworfen. Der Einsatz des Spiels für eine Spielerin / einen Spieler beträgt € 2. Die jeweilige Auszahlung ist von der Summe der drei geworfenen Zahlen abhängig und wird in der nachstehenden Tabelle teilweise angegeben.

Summe der drei geworfenen Zahlen	Auszahlung an die Spielerin/den Spieler
positiv	0
null	2
negativ	?

i) Eine Person spielt dieses Spiel fünfmal. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dabei genau zweimal die Summe der drei geworfenen Zahlen genau null ist! **(A)**

P(Summe 0) = $^1/_9$ Daher P(genau 2 mal 0) = 0,0867.

ii) Berechnen Sie, welchen Betrag der Anbieter des Spiels für das Würfeln einer negativen Summe höchstens auszahlen darf, um langfristig mit keinem Verlust rechnen zu müssen!

$^{23}/_{27} \cdot 0 + {}^{3}/_{27} \cdot 2 + {}^{1}/_{27} \cdot u - 2 = 0$,daraus u=48.-€

c) Peter wirft den Würfel C 100-mal. Die Zufallsvariable Z beschreibt die Anzahl der gewürfelten Sechser.

Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von Z!

E(X) = 50. σ =5

Beispiel 4: (4 Punkte)

Gegeben sind eine (normierte) quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in$ R und die zugehörige Polynomfunktion f mit $f(x) = x^2 + p \cdot x + q$.

a) Lässt sich die Gleichung $x^2 + p \cdot x + q = 0$ in der Form $(x - z) \cdot \left(x - \frac{1}{z}\right) = 0$ mit $z \in$ R und $z \neq 0$ schreiben, dann spricht man von einer reziproken quadratischen Gleichung.

i) Geben Sie mithilfe von Gleichungen an, wie die Parameter p und q jeweils von z abhängen!

q stets 1. Für p gilt: p= - z – $^1/_z$

ii) Bestimmen Sie die Werte für z, für die die reziproke quadratische Gleichung genau eine Lösung besitzt.

Genau eine Lösung, wenn z = - $^1/_z$ ist, d.h. z= 1 bzw. -1

b) Wählt man in der gegebenen Funktionsgleichung den Wert $q = -1$, dann erhalt man eine Polynomfunktion zweiten Grades f mit $f(x) = x^2 + p \cdot x - 1$.

i) Begründen Sie rechnerisch, warum die Gleichung $f(x) = 0$ genau zwei verschiedene Lösungen in R haben muss!

Der Wert der Diskriminante ist stets positiv!

ii) Begründen Sie, warum die Funktion f eine positive und eine negative Nullstelle haben muss!

Der Wert der Diskriminante ist stets größer als $^p/_2$, daher stets eine positive und eine negative Lösung!