# 1. Mathematikschularbeit 8a
# 14.12.2017

**Name:** ______________________________

**Punkte:** ______________________________

**Note:** ______________________________

**Unterschrift:** ______________________________

**Punkteschlüssel**

| Note | Sehr Gut | Gut | Befriedigend | Genügend | Nicht Genügend |
|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | 36-31 | 30-25 | 24-18 | 17-12 | < 12 |

wobei jeweils zumindest 12 Grundkompetenzpunkte erreicht werden müssen!

## Viel Erfolg!

| | Teil 1 | Teil 2 | Teil 2 / Komp. Teil 1 | Gesamtpunkte |
|---|---|---|---|---|
| Punkte | __/18P | __/18P | __/3P | __/36P |

**Hinweise:**

- **Teil 1** prüft „das Wesentliche“ ausgewählter Themenbereiche. Die Aufgaben in Teil 1 werden mit insgesamt 18 Punkten bewertet, jede Teilaufgabe mit 1 Punkt. Um eine positive Beurteilung zu erhalten, sind in jedem Fall zumindest $^2/_3$ der Punkte in diesem Bereich - das sind 12 Punkte - zu erreichen.
- **Teil 2** folgt und wird getrennt von Teil 1 bearbeitet.

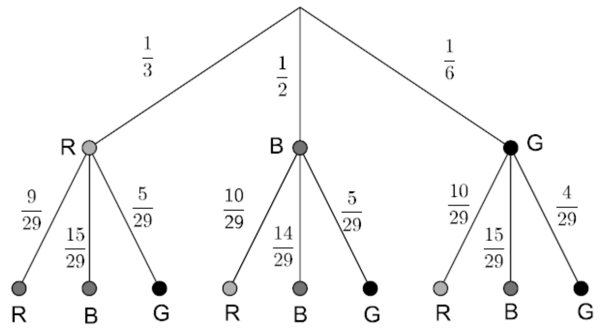
## Teil I: Grundkompetenzen (18 Punkte)

**Beispiel 1: (1 Punkt)**
Ein Zufallsexperiment wird durch eine binomialverteilte Zufallsvariable $X$ beschrieben. Diese hat die Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0{,}36$ und die Standardabweichung $\sigma = 7{,}2$.

Berechnen Sie den zugehörigen Parameter $n$ (Anzahl der Versuche)!

n=__________________________________________

**Beispiel 2: (1 Punkt)**
In einem Gefäß befinden sich rote, blaue und grüne Kugeln. Es werden zwei Kugeln gezogen.
Das folgende Baumdiagramm veranschaulicht die möglichen Ergebnisse des Zufallsversuchs:




R = rote Kugel
B = blaue Kugel
G = grüne Kugel

*Quelle: http://www.mathe-online.at/mathint/wstat1/grafiken/baumdiagramm2.gif [18.12.2014] (adaptiert)*

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine rote Kugel gezogen wird!

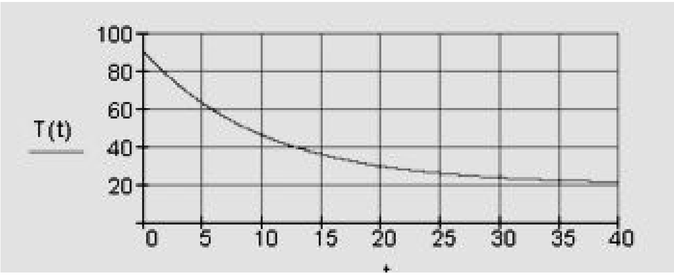
P(E)= ________________________________________________

**Beispiel 3: (1 Punkt)**
Eine Firma betreibt insgesamt 8 Kopiergeräte, die völlig unabhängig voneinander verwendet werden können. Die Betriebsbereitschaft der einzelnen Geräte wird dabei durch eine grüne Kontrolllampe am Gerät angezeigt. Zu einem zufällig ausgewählten Zeitpunkt leuchtet die grüne Kontrolllampe mit einer Wahrscheinlichkeit von 85%. Ist das Gerät nicht betriebsbereit (Papierstau, kein Papier, kein Toner), wechselt die Farbe der Kontrolllampe auf rot.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zu einem zufälligen Zeitpunkt nicht mehr als 2 Kopiergeräte betriebsbereit sind?

**Beispiel 4: (1 Punkt)**
Gegeben sind fünf Gleichungen mit der Unbekannten t und verschiedenen Parametern.
Kreuzen Sie die beiden linearen Gleichungen an!

| | |
|---|---|
| freier Fall: $s = \frac{g}{2} \cdot t^2$ | ☐ |
| senkrechter Wurf: $h = v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$ | ☐ |
| gleichmäßig beschleunigte Rotation: $\omega = \alpha \cdot t + \omega_0$ | ☐ |
| gleichmäßig beschleunigte Kreisbewegung: $\varphi = \frac{\omega \cdot t}{2}$ | ☐ |
| Leistung: $P = \frac{W}{t}$ | ☐ |

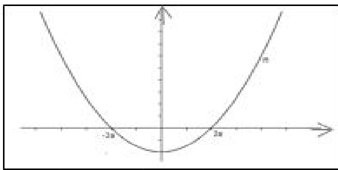
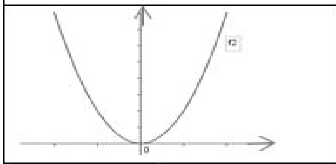
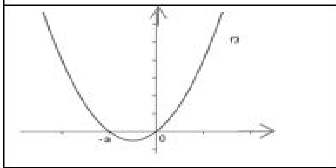
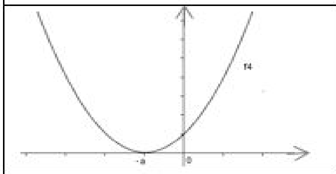
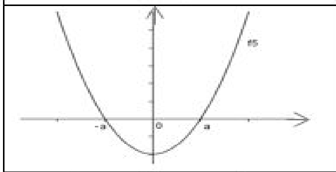
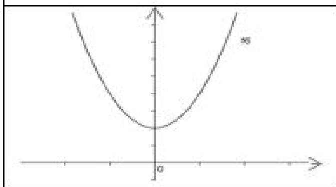
**Beispiel 5: (1 Punkt)**
Ein Pudding kühlt nach seiner Zubereitung ab. Der Term T(t) = $20 + 70e^{-0,1t}$ , $t \geq 0$
(t in Minuten, T(t) in Grad Celsius) beschreibt den Abkühlungsvorgang. Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion T(t).




Berechnen Sie für die ersten 10 Minuten die durchschnittliche Temperaturänderung!

**Beispiel 6: (1 Punkt)**
Gegeben sind vier quadratische Gleichungen mit der Variablen x mit x ∊ R und dem Parameter a mit a ∊ N (a ≠ 0). Die Deutung der Lösungen quadratischer Gleichungen kann anhand der Graphen entsprechender Funktionen erfolgen.
Ordnen Sie den vier quadratischen Gleichungen jeweils die Grafik zu, die die Ermittlung der Lösungen auf grafischem Weg veranschaulicht!

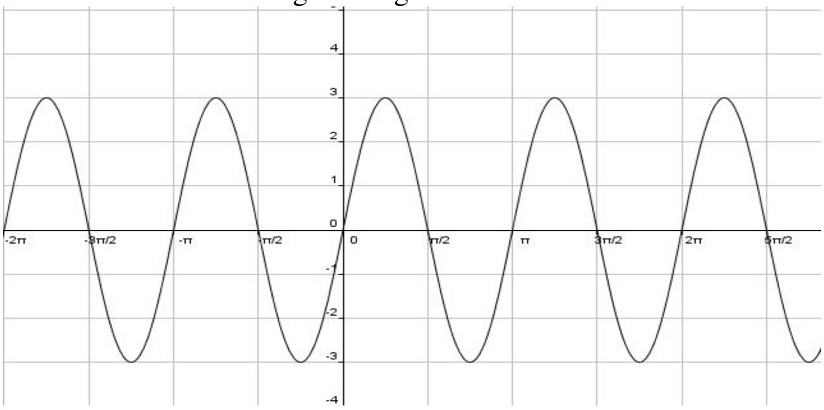
| | |
|---|---|
| $ax^2 = 0$ | |
| $x^2 + 4a^2 = 0$ | |
| $x^2 + ax = 0$ | |
| $x^2 - a^2 = 0$ | |

| | |
|---|---|
|  | A |
|  | B |
|  | C |
|  | D |
|  | E |
|  | F |

**Beispiel 7: (1 Punkt)**
Kolibakterien vermehren sich pro Minute um 4,4%. Berechnen Sie die Zeit, in der sich ihr Bestand verdoppelt hat!

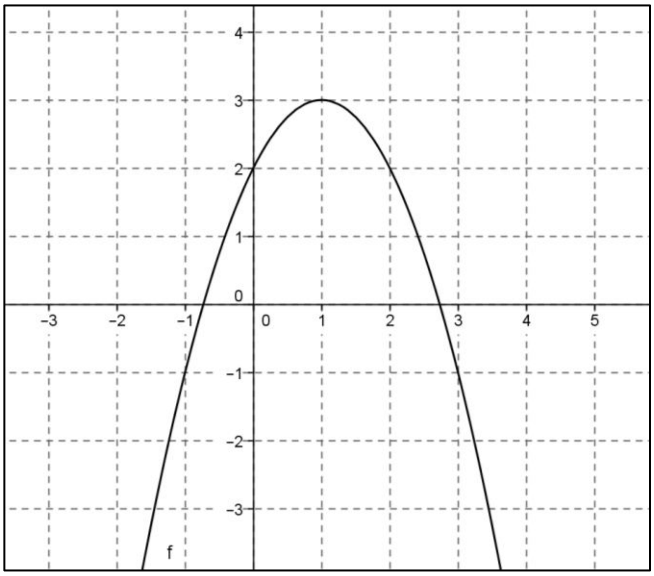
Lösung : _______________________

**Beispiel 8: (1 Punkt)**
Gegeben ist der Graph einer Sinusfunktion f mit f(x) = a · sin (b·x) mit a, b ∈ **R**.
Geben Sie die Funktionsgleichung an!




**f(x)=**___________________

**Beispiel 9: (1 Punkt)**
Skizzieren Sie zum Graphen der Funktion f einen Graphen einer Stammfunktion F!



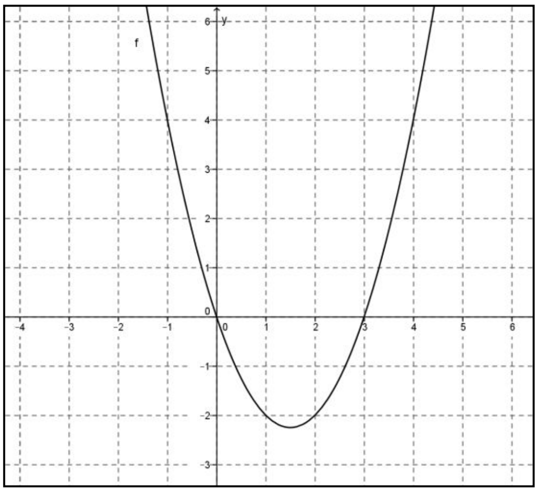

**Beispiel 10: (1 Punkt)**
Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

| | |
|---|---|
| Die Steigung der Sekante im Intervall $[x_0; x_0 + \Delta x]$ wird durch $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ angegeben. | ☐ |
| Die Momentangeschwindigkeit eines Körpers entspricht der momentanen Änderungsrate der Beschleunigung. | ☐ |
| Die durchschnittliche Geschwindigkeit im Intervall $[x_0; x_0 + \Delta x]$ wird durch $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ angegeben. | ☐ |
| In einem Weg – Zeit – Diagramm entspricht die Durchschnittsgeschwindigkeit im Zeitintervall $[t_0; t_2]$ der Steigung der entsprechenden Sekante. | ☐ |
| Die Momentanbeschleunigung eines Körpers entspricht der momentanen Änderungsrate der Geschwindigkeit. | ☐ |

**<u>Beispiel 11</u>: (1 Punkt)**

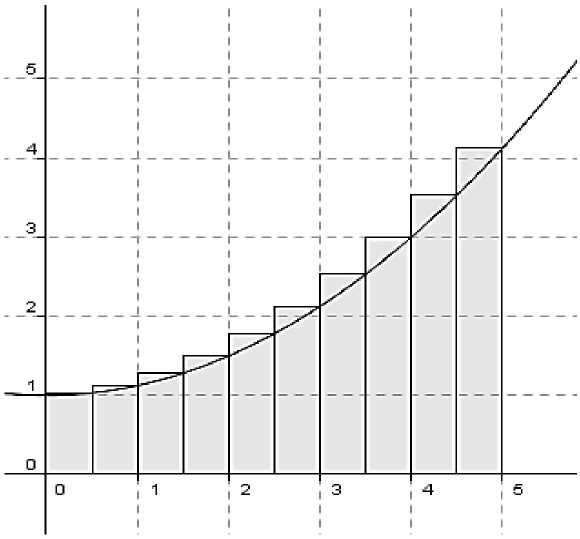
Färben Sie jene Fläche im vorgegebenen Koordinatensystem an, die der Funktionsgraph f(x) im Intervall [ -1; 4 ] mit der x - Achse im einschließt!
Geben Sie eine allgemeine Formel für den Inhalt dieses Flächenstückes an!

A = ________________________________________




**<u>Beispiel 12</u>: (1 Punkt)**

In der nachstehenden Abbildung sind der Graph einer Polynomfunktion f sowie ein aus 10 gleich breiten Rechtecken bestehendes, grau gefärbtes Flächenstück dargestellt. Der Flächeninhalt des grau gefärbten Flächenstücks wird mit A bezeichnet.
Kreuzen Sie die beiden für die gegebene Abbildung zutreffenden Aussagen an!



| | |
|---|---|
| $\int_{2,5}^{5} f(x)dx < \int_{0}^{2,5} f(x)dx$ | ☐ |
| $\int_{0}^{5} f(x)dx < A$ | ☐ |
| $\int_{0}^{2,5} f(x)dx = \frac{A}{2}$ | ☐ |
| $\int_{0}^{5} f(x)dx > 2 \cdot A$ | ☐ |
| $\int_{4}^{5} f(x)dx > \frac{A}{5}$ | ☐ |

**<u>Beispiel 13</u>: (1 Punkt)**

Ein Betrieb arbeitet mit der Kostenfunktion K(x) = 0,1x² + 0,1x +2. Dabei gibt x die erzeugte Menge in Stück an. Der Preis p in Abhängigkeit von der Menge x kann durch die Funktion p(x)= - 0,28x + 3,2 beschrieben werden.
Berechnen Sie jenes Intervall für die Produktionsmenge x, in dem der Betrieb einen Gewinn erwirtschaftet!

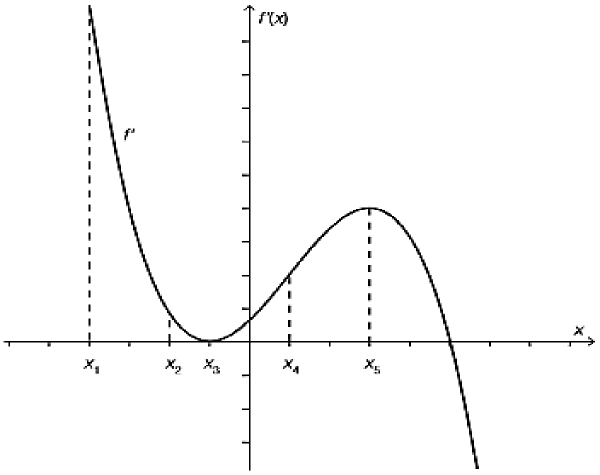
**Beispiel 14: (1 Punkt)**
Ein Auto fährt mit konstanter Geschwindigkeit und beschleunigt ab dem Zeitpunkt t = 0. Für seine Geschwindigkeit v in m/s gilt für die nächsten 4 Sekunden:

$$v(t) = 22 + 4t \quad (0 \leq t \leq 4)$$

Kreuzen Sie die beiden für die Bewegung dieses Autos zutreffenden Aussagen an!

| | |
|---|---|
| $v'(3)$ gibt die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t = 3 an. | ☐ |
| $v(3) - v(2)$ gibt die mittlere Geschwindigkeit für $2 \leq t \leq 3$ an. | ☐ |
| Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t = 0 wird mit v(0) berechnet. | ☐ |
| Mit $\int_0^4 v(t)\,dt$ kann man die Beschleunigungsstrecke berechnen. | ☐ |
| Die Beschleunigung des Autos nimmt im betrachteten Zeitraum zu. | ☐ |

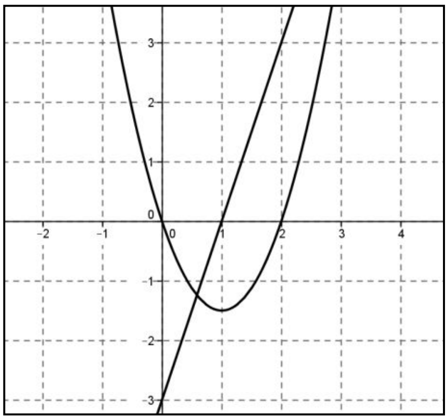
**Beispiel 15: (1 Punkt)**
In der untenstehenden Abbildung ist der Graph einer Ableitungsfunktion f ´ einer Polynomfunktion f vierten Grades dargestellt.




Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an:

| | |
|---|---|
| Jede Funktion f mit der Ableitungsfunktion f ´ hat an der Stelle $x_5$ eine horizontale Tangente. | ☐ |
| Es gibt eine Funktion f mit der Ableitungsfunktion f ´, deren Graph durch den Punkt P=(0\|0) verläuft. | ☐ |
| Jede Funktion f mit der Ableitungsfunktion f ´ ist im Intervall $[x_1; x_2]$ streng monoton fallend. | ☐ |
| Jede Funktion f mit der Ableitungsfunktion f ´ ist im Intervall $[x_3; x_4]$ streng monoton steigend. | ☐ |
| Die Funktionswerte f(x) jeder Funktion f mit der Ableitungsfunktion f ´ sind für $x \in [x_3; x_5]$ stets positiv. | ☐ |

**Beispiel 16: (1 Punkt)**
Von einer Funktion f sind die Graphen der Ableitungsfunktionen von f ´(x) und f ´´(x) gegeben.
Lesen Sie aus den Graphen die Extremstelle(n) und die Wendestelle(n) der Funktion f(x) ab und geben Sie die jeweiligen Stellen an!




Extremstelle(n) (Maximum oder Minimum?):

………………………………………………

Wendestelle(n):

………………………………………………

**Beispiel 17: (1 Punkt)**
Eine 20cm hohe Blumenvase besitzt in jeder Höhe eine annähernd kreisförmige Schnittfläche. Der Radius r (in cm) der Schnittfläche kann in Abhängigkeit von der Höhe h durch die Funktion $r(h) = {}^{1}/_{4}\, h + 4$ beschrieben werden.

Stellen Sie eine Formel für das Volumen der bis zur halben Höhe gefüllten Vase auf und berechnen Sie dieses Volumen!

**Beispiel 18: (1 Punkt)**
Berechnen Sie den Inhalt jenes Flächenstücks, das die Graphen der Funktionen $f(x) = x^2 - 4x$ und $g(x) = 2x - 5$ miteinander einschließen!

## Teil II: Erweiterungsstoff (18 Punkte)

**<u>Beispiel 1</u>: (5 Punkte)**

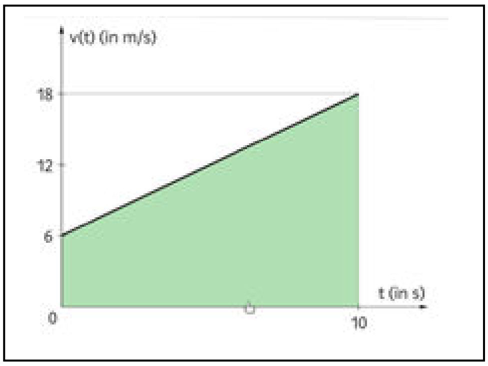
Ein LKW beschleunigt aus dem Stand (v(0) = 0, s(0) = 0) bis zu seiner Höchstgeschwindigkeit (danach findet keine weitere Beschleunigung statt, also a = 0). Die Beschleunigung a konnte empirisch ermittelt werden und lässt sich annähernd durch folgende Funktion beschreiben:

$a(t) = \frac{t^2}{8100} - \frac{t}{45} + 1$ ($m/s^2$, t Sekunden nach dem Start)

a) Wie lange dauert der Beschleunigungsvorgang?

b)**(A)** Bestimme die Geschwindigkeitsfunktion v(t) und gib die Höchstgeschwindigkeit in km/h an!

c) Gib eine Funktion s(t) an, die den zurückgelegten Weg in Abhängigkeit von der Zeit t beschreibt! Bestimme die Länge des zurückgelegten Weges bis zum Erreichen der Höchstgeschwindigkeit!

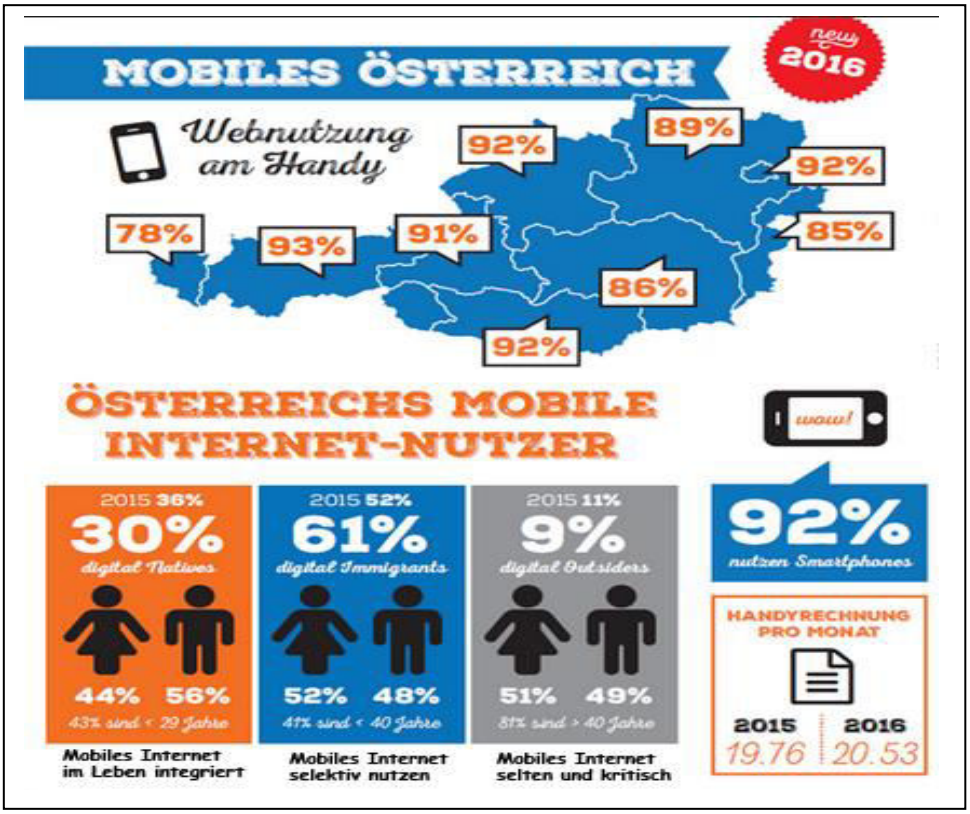



d) In der nebenstehenden Abbildung ist die Geschwindigkeit v eines LKWs in Abhängigkeit von der Zeit t dargestellt. Was gibt der Inhalt der grauen Fläche an? Wie groß ist die Beschleunigung des LKWs im angegebenen Zeitintervall?

e) Wie ändert sich der Graph von v, wenn der LKW mit gleicher Beschleunigung, aber mit der Ausgangsgeschwindigkeit 9m/s fährt? Ermittle rechnerisch, nach welcher Zeit in diesem Fall die Geschwindigkeit von 18 m/s erreicht wird!

**<u>Beispiel 2</u>: (5 Punkte)**

Wie verwenden Herr und Frau Österreicher ihre mobilen Geräte? (Mobile Communications Report 2016)




a) **(A)** Der Moderator der Morgenshow von Radio Bregenz ruft zufällig drei Vorarlberger an und fragt, ob sie das Internet auf ihrem Handy nutzen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass keiner der drei das Internet auf seinem Handy nutzt?

b) Für eine Diskussionsrunde in einer Fernsehshow sollen drei Frauen ausgewählt werden, die sich als „digital Natives" deklarieren. Dazu werden 3 Personen zufällig angerufen und zunächst nach der Art ihrer mobilen Internetnutzung befragt. Deklarieren sie sich als „digital Natives", erfolgt die Frage nach dem Geschlecht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man auf diese Weise auf Anhieb drei Frauen mit der gewünschten Eigenschaft erhält?

c) Je 150 zufällig ausgewählte Wiener und Burgenländer werden zu ihrer Webnutzung am Handy befragt. Welche Anzahl an Webnutzern am Handy kann man aufgrund der vorliegenden Daten in beiden Bundesländern in dieser Stichprobe erwarten? Bestimme auch die Standardabweichung für beide Bundesländer und interpretiere die beiden erhaltenen Werte!

d) Im allgemeinen nutzen ältere Personen das Internet am Handy eher selten. So sind etwa 81% aller „digital outsiders" älter als 40 Jahre. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, unter drei zufällig ausgewählten Personen ausschließlich „digital outsiders", die jünger als 40 Jahre sind, zu finden?

e) Für die Varianz V(X) einer binomialverteilten Zufallsvariablen X gilt die Formel: $V(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$. Dieser Wert ist bei konstantem Wert n für $p = {}^{1}/_{2}$ maximal, für $0 < p < {}^{1}/_{2}$ und ${}^{1}/_{2} < p < 1$ in jedem Fall kleiner. Welche Folgen ergeben sich daraus für die Streuung einer binomialverteilten Zufallsvariablen mit sehr kleiner Wahrscheinlichkeit?

**Beispiel 3: (6 Punkte)**

Viel Erfolg!