2. Mathematikschularbeit 8c
2.3.2017

Name: ______________________________

Punkte: ______________________________

Note: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Punkteschlüssel

Note	Sehr Gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht Genügend
Punkte	48-41	40-33	32-24	23-16	< 16

wobei jeweils zumindest 16 Grundkompetenzpunkte erreicht werden müssen!

Viel Erfolg!

	Teil 1	Teil 2	Teil 2/Komp. Teil 1	Gesamtpunkte
Punkte	__/24P	__/24P	__/4P	__/48P

Hinweise:

- **Teil 1** prüft „das Wesentliche“ ausgewählter Themenbereiche. Die Aufgaben in Teil 1 werden mit insgesamt 24 Punkten bewertet, jede Aufgabe mit 1 Punkt. Um eine positive Beurteilung zu erhalten, sind in jedem Fall zumindest $^2/_3$ der Punkte in diesem Bereich - das sind 16 Punkte - zu erreichen.
- **Teil 2** umfasst den „Erweiterungsstoff“. In den Aufgaben können insgesamt 24 Punkte erreicht werden. Es können vier Ausgleichspunkte (gekennzeichnet mit **(*)**) für den Teil 1 erworben werden.
- Sowohl in **Teil 1** als auch **Teil 2** darf der Taschenrechner als Hilfsmittel verwendet werden. Alle Rechenwege müssen jedoch nachvollziehbar angeschrieben werden.

Teil I: Grundkompetenzen (24 Punkte)

<u>Beispiel 1</u> : (1 Punkt)

Welche der im folgenden angeführten Aussagen gelten? Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an!

Jede reelle Zahl ist eine irrationale Zahl	□
Jede reelle Zahl ist eine komplexe Zahl	■
Jede rationale Zahl ist eine ganze Zahl	□
Jede ganze Zahl ist eine natürliche Zahl	□
Jede natürliche Zahl ist eine reelle Zahl	■

<u>Beispiel 2</u> : (1 Punkt)

Gegeben ist die quadratische Gleichung $4x^2$ - d = 2 mit $d \in R$. Gib jenen Wert für d an, für den die Gleichung genau eine Lösung hat! d= -2

<u>Beispiel 3</u> : (1 Punkt)

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem in den Variablen $x, y \in R$

4x + 3y = 6

6x + by = c

Ermittle jene Werte für b und c, für die das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat!

b=4,5 c=9

<u>Beispiel 4</u> : (1 Punkt)

Gegeben ist die Gleichung a · x = 5 · x – b mit $a,b \in R$. Gib ein Wertepaar a und b an, für das die Gleichung keine Lösung besitzt!

a= 5 b = 1

<u>Beispiel 5</u> : (1 Punkt)

Die Anzahl der einzelnen Produkte in einem Warenlager wird durch den Stückzahlvektor $L=(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ angegeben, der Nettopreis der einzelnen Waren durch den Stückpreisvektor $P=(p_1, p_2, \ldots, p_n)$

Stelle einen Term V auf, der den Verkaufswert aller im Lager vorhandenen Waren unter Berücksichtigung von 20% Mehrwertsteuer angibt!

V = 1,2 · L · P

<u>Beispiel 6</u> : (1 Punkt)

Viele Anwendungsbereiche lassen sich durch lineare Funktionen beschreiben. Auf welche der folgenden Situationen trifft dies zu? Kreuze die zutreffende(n) Aussage(n) an!

■ Der jährliche Wertverlust einer Maschine (durch Gebrauch) beträgt 5% ihres Neupreises

□ Die Schadstoffbelastung in Ballungszonen steigt jährlich um etwa 3%

□ Die Anzahl einer Insektenart verdoppelt sich alle 2 Jahre

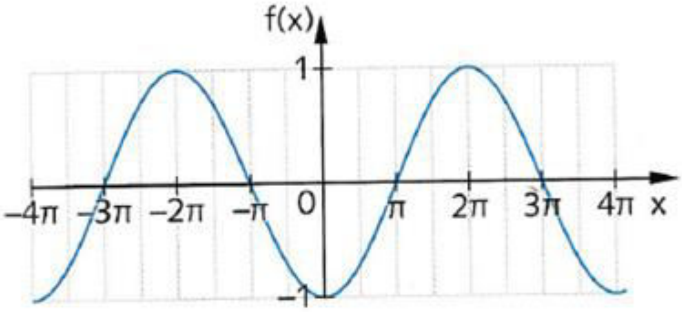
■ Die Geschwindigkeit eines für 5 Sekunden konstant beschleunigten Körpers in diesem Zeitraum

■ Die mittlere Jahrestemperatur steigt jährlich um 0,5°C

Beispiel 7 : (1 Punkt)

Das Diagramm zeigt den Graphen einer allgemeinen Sinusfunktion f. Bestimme die Periodenlänge der Funktion f!

Periodenlänge: 4 ·π



Beispiel 8 : (1 Punkt)

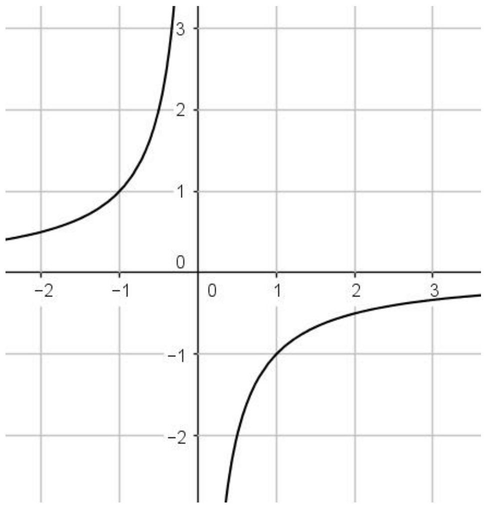
Die Halbwertszeit eines radioaktiven Elements beträgt 6 Stunden. Stelle mit Hilfe dieser Information das Zerfallsgesetz in der Form $N_t = N_0 \cdot q^t$ auf!

q= 0,8909

Beispiel 9 : (1 Punkt)

In der nebenstehenden Graphik ist eine Funktion der Form f(x) = $a \cdot x^z, a \in R, a \neq 0, z \in Z$, dargestellt. Welche der folgenden Funktionsgleichungen ist die Gleichung der Funktion?

□ $f(x) = 2 \cdot x^{-2}$	■ $f(x) = -x^{-1}$
□ $f(x) = 2 \cdot x^2$	□ $f(x) = -2 \cdot x^{-1}$



Beispiel 10 : (1 Punkt)

Gegeben ist die Gerade g: X = (1 | -2) + s · (2 | -3). Ermittle die Gleichung einer Geraden h, die durch P(2 |0) verläuft und normal auf g steht!

h: X=(2 | 0) + t · (3 | 2)

Beispiel 11 : (1 Punkt)

Gegeben ist die Gerade g: X=(1 | 0 | -1) + t · (1 | -1 | 1). Bestimme die Gerade

h: X = (1 | 0 | z) + s · (3 | b | c) so, dass g und h echt parallel zueinander liegen!

h: X = (1 | 0 | -2) + s · (3 | -3 | 3), z beliebig ≠ -1

Beispiel 12 : (1 Punkt)

Die Bergstation einer Seilbahn liegt auf 2250m Seehöhe, ihre Talstation auf 1450m. Die schräge Länge der Bahn beträgt laut Hersteller 2200m. Unter welchem Winkel ist die Bahn im Mittel geneigt? α = 21,32° (sin(α) = 800/2200)

Beispiel 13 : (1 Punkt)

Gegeben ist die Funktion f(t) = e^{t+1} . Kreuze die zutreffende(n) Aussage(n) an!

□ Die mittlere Änderungsrate im Intervall [1; 2] ist negativ.

■ Die Steigung der Tangente an f(t) in P(0 | f(0)) ist $k_t = e$

■ f(t) ist im gesamten Verlauf streng monoton steigend.

□ f(t) besitzt genau ein lokales Minimum.

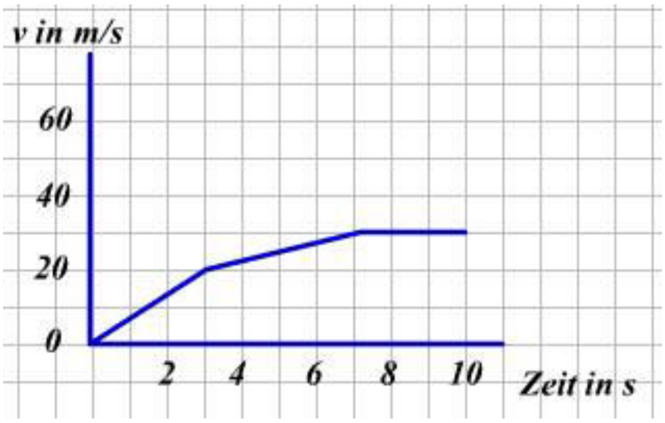
Beispiel 14 : (1 Punkt)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sqrt{\sin(x)}$. Bestimme f ‘(x) und gib die verwendeten Regeln an!

f ‘(x) = $\frac{\cos(x)}{2 \cdot \sqrt{\sin(x)}}$

Beispiel 15 : (1 Punkt)

Gegeben ist das nebenstehende Geschwindigkeitsdiagramm, das die Bewegung eines Körpers während 10 Sekunden beschreibt. Welchen Weg hat der Körper in diesem Zeitraum zurückgelegt?



Zurückgelegter Weg entspricht der Fläche unter der Kurve:

s = 30 + 100 + 90 =220m

Beispiel 16 : (1 Punkt)

Die Funktion f(x) = 16 - x^2 und die positiven Koordinatenachsen begrenzen ein Flächenstück. Berechne seinen Flächeninhalt A!

A= $\int_0^4 16 - x^2 dx = \frac{128}{3} = 42{,}66 FE$

Beispiel 17 : (1 Punkt)

Auf einer Party darf jeder Teilnehmer mit 10 Stecknadeln auf 5 Luftballons schießen. Als Treffer gilt, wenn der Luftballon zerplatzt. Der Organisator: „Die Wahrscheinlichkeit, wenigstens 2 Luftballons zu treffen, beträgt 0,25. Alle 5 Luftballons schaffen allerdings nur 3%. Vervollständige die nachstehende Wahrscheinlichkeitsfunktion!

Treffer	0	1	2	3	4	5
P(Treffer)	**0,55**	0,2	**0,1**	0,07	0,05	**0,03**

Beispiel 18 : (1 Punkt)

Laut Statistik Austria besitzen 13,8% der Bevölkerung einen Tertiärabschluss (Hochschul- Akademie- oder Kollegabschluss) als höchste abgeschlossene Ausbildung. Bezogen auf eine Stichprobe zufällig ausgewählter Personen ergibt sich ein Ereignis E mit folgender Wahrscheinlichkeit P(E):

$$P\,(E) = \binom{100}{15} \cdot 0{,}138^{15} \cdot 0{,}862^{85}$$

Beschreibe das Ereignis E und erläutere die Bedeutung der in der angegebenen Gleichung vorkommenden Faktoren.

Wahrscheinlichkeit, dass unter 100 zufällig ausgewählten Personen genau 15 einen Tertiärabschluss haben!

Beispiel 19 : (1 Punkt)

Ein Fahrzeug ist durch Wegfahrsperre (W) und Alarmanlage (A) gesichert. Die Alarmanlage versagt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,2%, die Wegfahrsperre mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,05%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens einer der Sicherungen ihren Zweck erfüllt?

P(mindestens 1 funktioniert) = 1 – P(beide versagen) = 1 – 0,002 · 0,0005 = 0,999999

Beispiel 20 : (1 Punkt)

Gegeben ist eine nicht vollständig ausgefüllte Häufigkeitstabelle für die Schülerinnen und Schüler einer AHS in Salzburg Stadt.

	Aus Salzburg Stadt	Nicht aus Salzburg Stadt	Summe
Schülerinnen	185	65	**250**
Schüler	260	**40**	**300**
Summe	**445**	105	**550**

Vervollständige die Häufigkeitstabelle und berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei zufälliger Auswahl einer Schülerin dieser Schule die Auswahl auf eine Schülerin fällt, die nicht aus Salzburg Stadt ist!

P(Schülerin nicht aus Salzburg) = 65 / 250 = 0,26

Beispiel 21 : **(1 Punkt)**

Erfahrungsgemäß werden etwa 80% aller Einbrüche von Wiederholungstätern ausgeführt. Bestimme Erwartungswert und Varianz der Zufallsvariablen, wenn im Vorjahr insgesamt 450 Einbrüche gemeldet wurden

E(X) = 450 · 0,8 = 360 V(X) = $450 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 72$

Beispiel 22 : **(1 Punkt)**

Erfahrungsgemäß werden etwa 80% aller Einbrüche von Wiederholungstätern ausgeführt. Von den 450 im Vorjahr insgesamt gemeldeten Einbrüchen waren allerdings nur bei 330 Wiederholungstäter am Werk. Ist dies ausreichend signifikant dafür, dass der Anteil der Wiederholungstäter gesunken ist und das Resozialisierungsprogramm Wirkung zeigt?

Abweichung nach unten: Aus Bsp. 21 ist ersichtlich, dass mit Normalverteilung gerechnet werden kann. D. h. x_u = 360 – 1,645 · 8,485 = 346, d.h. signifikant darunter. Resozialisierungsprogramm wirkt!

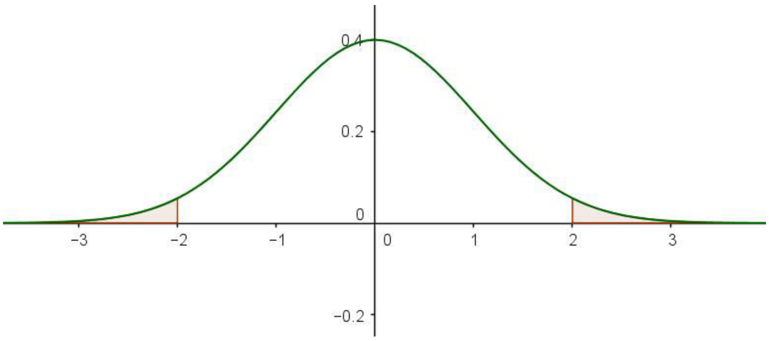
Beispiel 23 : **(1 Punkt)**

Die Laufleistung von Mopedreifen ist näherungsweise normalverteilt und beträgt im Mittel 8000km bei einer Standardabweichung von 600km. Wieviel Prozent der Reifen weisen eine Laufleistung von mehr als 9500km auf?

Es gilt: $z = \frac{9500 - 8000}{600} = 2{,}5 \quad \Phi(z) = 0{,}9937$, daher nur 0,62% aller Reifen.

Beispiel 24 : **(1 Punkt)**

Die nebenstehende Graphik zeigt die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Normalverteilung für eine Zufallsvariable X mit zwei schraffierten Flächenbereichen. Welche der folgenden Wahrscheinlichkeiten entsprechen der schraffierten Fläche?



□ P(-2 ≤ X ≤2) ■ 2 · P(X ≤ -2) □ P(X≤ - 2) □ P(X ≥ 2) ■ 2 · (1 - P(X ≤ 2))

Viel Erfolg!

Teil II: Erweiterungsstoff (24 Punkte)

Beispiel 1: (6 Punkte)

Die folgende Tabelle gibt die Bevölkerung Klagenfurts im Zeitraum 1981–2016 an.

Jahr	1981	1991	2001	2011	2016
Einwohner	87321	89415	90141	94483	99110

a)(*) (1 Punkt) Wie groß war die durchschnittliche jährliche Änderungsrate der Einwohnerzahl im angegebenen Zeitraum?

k= (99110-87321) / 35 = 336,83

b) (1 Punkt) Erstelle für den angegebenen Zeitraum ein lineares Bevölkerungsmodell und prognostiziere damit die Einwohnerzahl Klagenfurts im Jahre 2050!

$B_t = 336{,}83 \cdot t + 99110$ (mit t=0 für das Jahr 2016)

$B_{2050} = 336{,}83 \cdot 34 + 99110 = 110562$ Einwohner.

c) (1 Punkt) Erstelle für den angegebenen Zeitraum ein exponentielles Bevölkerungsmodell und prognostiziere damit die Einwohnerzahl Klagenfurts im Jahre 2050!

$B_t = 99110 \cdot q^t$ mit $q=\sqrt[35]{\frac{99110}{87321}} = 1{,}003625$, daher für

$B_{2050} = 99110 \cdot q^{34} = 112084$ Einwohner.

d) (1 Punkt) Entscheide und begründe, welches der beiden Modelle die reale Situation besser beschreibt!

Beide Modelle problematisch, da sehr langer Zeitraum, langfristig exponentielles Modell eher unwahrscheinlich, da unlimitiertes Wachstum!

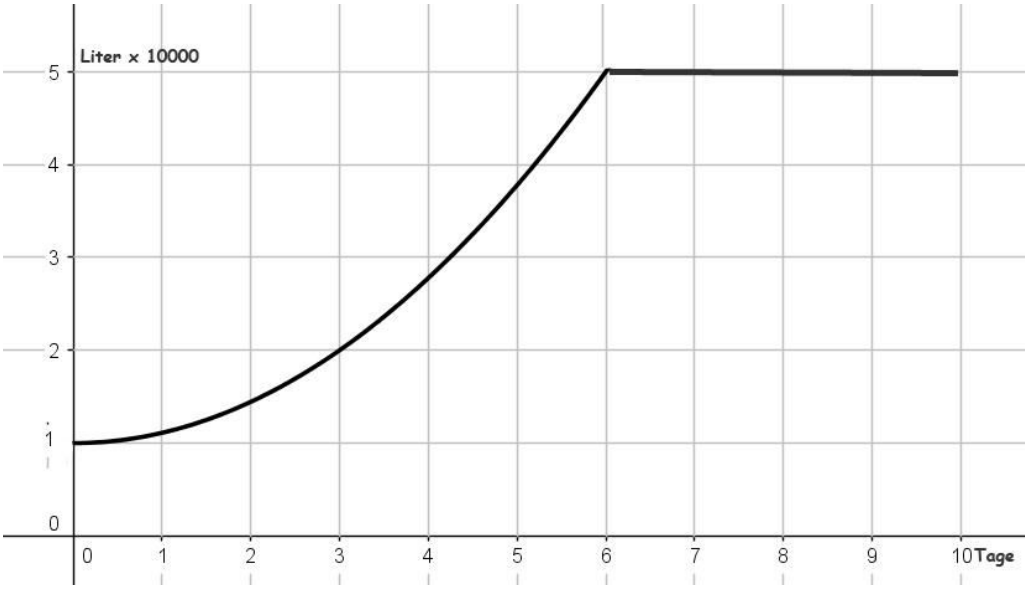
e) (2 Punkte) In welchem Jahr würde Klagenfurt bei Annahme exponentiellen Wachstums mehr als 150000 Einwohner haben? Wie groß wäre in diesem Fall die Verdopplungszeit?

$B_t = 99110 \cdot 1{,}003625^t = 150000$, daraus t= 114,53, d.h. im Jahre 2130.

Verdopplungszeit wäre t= 191,5 Jahre.

Beispiel 2: (6 Punkte)

Die nebenstehende Graphik gibt die Zuflussgeschwindigkeit (in Liter pro h) im Zeitraum von 10 Tagen an, mit der ein Staubecken gefüllt wird. Die Zufluss-geschwindigkeit kann dabei in den ersten 6 Tagen mit Hilfe einer Funktion



$f(t)=at^2 + b$ modelliert werden, danach ist die Zuflussgeschwindigkeit konstant.

a) (2 Punkte) Bestimme die Konstanten a und b der Funktion! Wie groß ist die mittlere Zuflussgeschwindigkeit innerhalb der ersten 3 Tage?

Es gilt: b=1 und P(6 | 5) auf f(t). Daher 5 = 36a + 1 und a= $^1/_9$.

$f(t) = {}^1/_9\, t^2 + 1$

Mittlere Zuflussgeschwindigkeit in den ersten 3 Tagen: (20000 – 10000) / 3 = 3333,33Liter pro Stunde.

b)(*) (1 Punkt) Zu welchem Zeitpunkt ist die Änderungsrate der Zuflussgeschwindigkeit am größten und wie groß ist sie?

Größte Änderungsrate bei t=6, man erhält $f\,'(t) = {}^2/_9\, t$ und für t=6 13333 Liter je h^2

c)(2 Punkte) Berechne die Menge (in m^3), die im gesamten Zeitraum in das Staubecken geflossen ist und gib Deine Vorgangsweise an!

Integral berechnen –

$$V_1 = \int_0^6 f(t)dt = \int_0^6 \frac{1}{9}t^2 + 1dt = 14\text{ , } V_2 = \int_6^{10} 5dt = 20$$

d.h. 140000 · 24h + 200000 · 24h = 8160000 Liter, 8160m^3.

d) (1 Punkt) Was lässt sich aufgrund c) über das Fassungsvermögen des Staubeckens aussagen? Nichts, weil man nur die Zuflussmenge, nicht aber den Anfangsinhalt kennt.

Beispiel 3: (6 Punkte)

a.) i.)(1 Punkt) Ordne jeweils das gegebene bestimmte Integral dem entsprechenden Text zu:

(1)	$\pi \cdot \int_0^6 (6-x)^2\,dx$	(2)	Flächeninhalt zwischen Parabel, x-Achse und den vertikalen Grenzen x = 0 und x = 6.
(2)	$\int_0^6 (6-x)^2\,dx$	(1)	Volumen eines Drehkegels mit r = 6 und h = 6
(3)	$\int_0^6 (6-x)\,dx$	(4)	Volumen eines Drehkegels mit r = 6 und h = 6, das um 6 VE verringert wird
(4)	$\pi \cdot \int_0^6 x^2\,dx - 6$	(3)	Flächeninhalt eines rechtwinkeligen, gleichschenkeligen Dreiecks mit a = b = 6

(*)(1 Punkt) ii.) Berechne das bestimmte Integral von (1).

$$\pi \cdot \int_0^6 (6-x)^2\,dx$$

Man erhält: 72·π

b.) Der Hohlraum einer Sektschale entsteht durch Rotation der Funktion f mit $f(x) = k \cdot \sqrt{x}$ um die 1. Achse. Der Hohlraum ist 4 cm hoch und der Rand hat einen Radius von 6 cm.

i)(1 Punkt) Berechne die Konstante k der Funktion f(x).

Es gilt: P(4 | 6) auf f(x), daher: 6 = 2k und k=3

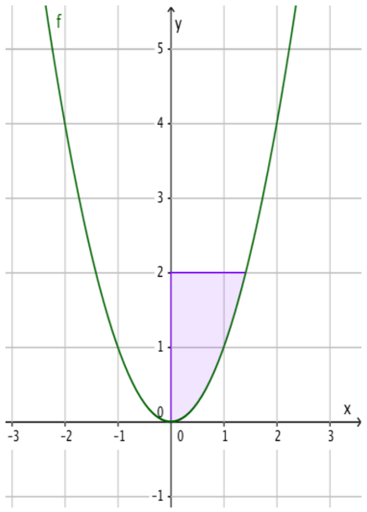
f(x) = $3 \cdot \sqrt{x}$

ii.)(1 Punkt) Welche Flüssigkeitsmenge enthält die Schale, wenn sie bis 1cm unter den oberen Rand gefüllt ist?

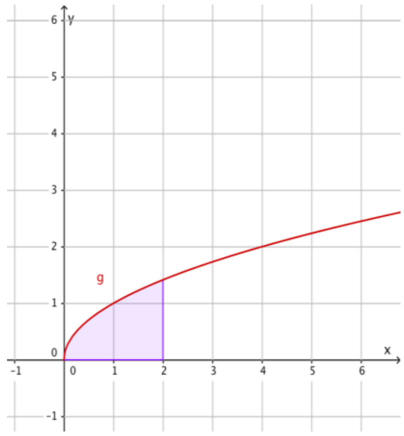
V= $\pi \cdot \int_0^3 \left(3 \cdot \sqrt{x}\right)^2 dx = \pi \cdot \frac{9}{2} x^2 \Big|_0^3 \pi \cdot \frac{81}{2} = 127{,}23 cm^3$

c.)(2 Punkte) Zeige durch Rechnung, dass die eingezeichneten Flächenstücke gleich groß sind!

f(x) = x^2



g(x) = $\sqrt{x}$



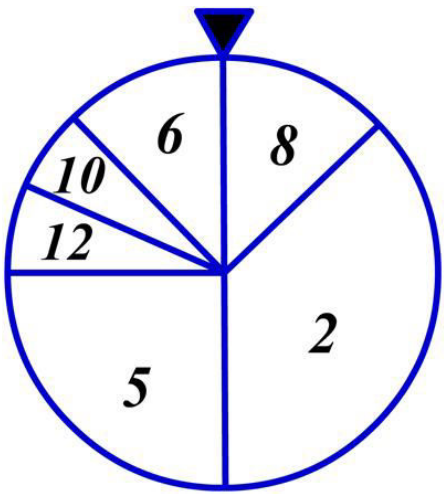
$$\int_0^{\sqrt{2}} x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{3}\cdot\sqrt{8}FE$$

Daher ist das obere Flächenstück $2\cdot\sqrt{2}-\frac{2}{3}\cdot\sqrt{2}=\frac{4}{3}\cdot\sqrt{2}$

$$\int_0^2 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 \frac{2}{3}\cdot\sqrt{8}=\frac{4}{3}\cdot\sqrt{2}FE$$

<u>Beispiel 4</u>: (6 Punkte)

Die nebenstehende Abbildung zeigt ein Glücksrad, welches in 6 unterschiedliche Sektoren eingeteilt ist. Je Spiel (einmal drehen) wird ein Einsatz von 6.-€ verlangt. Die Beschriftung der Sektoren gibt an, wieviel Euro ausbezahlt werden, wenn der Pfeil am entsprechenden Sektor stehenbleibt.



a) (2 Punkte) Es beschreibe die Zufallsvariable X die ausbezahlten Gewinne. Gib die Wahrscheinlichkeitsfunktion für X an und berechne den Erwartungswert für den Gewinn!

2	5	6	8	10	12
$^3/_8$	$^1/_4$	$^1/_8$	$^1/_8$	$^1/_{16}$	$^1/_{16}$

E(Gewinn) = $^3/_4 + {}^5/_4 + {}^3/_4 + 1 + {}^5/_8 + {}^3/_4 = {}^{41}/_8$ = 5,125, d.h. Verlust in Bezug auf den Einsatz!

b)(*) (1 Punkt) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei dreimaligem Drehen mindestens einen „Hauptgewinn“ zu erhalten?

P(mindestens 1 Hauptgewinn) = 1 – P(kein Hauptgewinn) = 1 – $(^{15}/_{16})^3$ = 0,176

c) (1 Punkt) Petra Pecher erhielt bei 3 Versuchen jedesmal nur ihren Einsatz ausbezahlt. Wie wahrscheinlich ist ein solches Ereignis?

P(dreimal nur Einsatz) =$(^{1}/_{8})^3$ = 0,002

d) (2 Punkte) Petra führt genau Buch über die Ergebnisse der einzelnen Spiele. Dabei ist ihr aufgefallen, dass bei den letzten 200 Spielen nur insgesamt 6 mal der Sektor „12“ kam. Ist dies ein Grund, dem Anbieter des Spiels „Betrug“ vorzuwerfen. Teste die entsprechende Hypothese mit 95% statistischer Sicherheit!

E(Sektor „12“) = $^{200}/_{16}$ = 12,5.

Standardabweichung: 3,42 > 3 , d.h. Normalverteilung:

Es gilt für die untere Grenze x_u= 12,5 – 1,645 · 3,42 = 6,86>6, d.h. Vorwurf ist mit 95% statistischer Sicherheit berechtigt!

Viel Erfolg!