# 3. Mathematikschularbeit 7a
# 24.05.2017

**Name:** ______________________________

**Punkte:** ______________________________

**Note:** ______________________________

**Unterschrift:** ______________________________

**Punkteschlüssel**

| Note | Sehr Gut | Gut | Befriedigend | Genügend | Nicht Genügend |
|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | 24-20 | 19-16 | 15-12 | 11-8 | < 8 |

wobei jeweils zumindest 8 Grundkompetenzpunkte erreicht werden müssen!

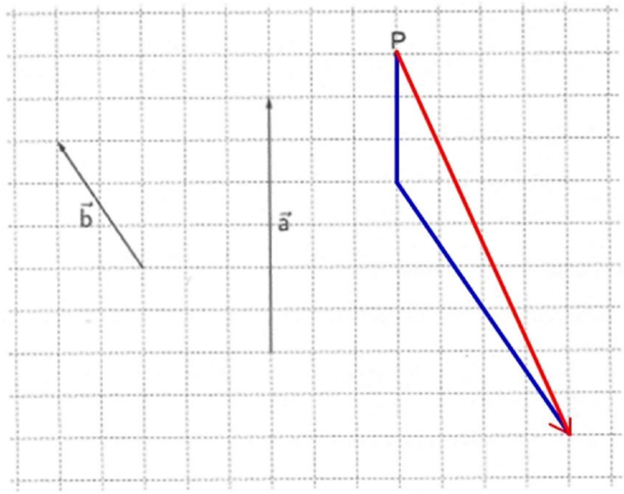
**Viel Erfolg!**

| | Teil 1 | Teil 2 | Teil 2 / Komp. Teil 1 | Gesamtpunkte |
|---|---|---|---|---|
| Punkte | __/12P | __/12P | __/2P | __/24P |

**Hinweise:**

- **Teil 1** prüft „das Wesentliche“ ausgewählter Themenbereiche. Die Aufgaben in Teil 1 werden mit insgesamt 12 Punkten bewertet, jede Aufgabe mit 1 Punkt. Um eine positive Beurteilung zu erhalten, sind in jedem Fall zumindest $^2/_3$ der Punkte in diesem Bereich - das sind 8 Punkte - zu erreichen.
- **Teil 2** umfasst den „Erweiterungsstoff“. In den drei Aufgaben können insgesamt 12 Punkte erreicht werden. Es können zwei Ausgleichspunkte (gekennzeichnet mit **A**) für den Teil 1 erworben werden.
- Sowohl in **Teil 1** als auch **Teil 2** darf der Taschenrechner als Hilfsmittel verwendet werden. Alle Rechenwege müssen jedoch nachvollziehbar angeschrieben werden.

## Teil I: Grundkompetenzen (12 Punkte)




**<u>Beispiel 1</u> : (1 Punkt)**

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ .

Löse die folgende Aufgabenstellung graphisch!

Stelle $-\frac{1}{2}\vec{a}-2\vec{b}$ ausgehend vom Punkt P durch einen Pfeil dar!

**<u>Beispiel 2</u> : (1 Punkt)**

Gegeben ist die Gerade g: $X=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$.

Stelle die Gleichung einer Geraden n auf, die normal auf g steht und g im Punkt Q(2 | -2) schneidet.

n : $X=\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$

**<u>Beispiel 3</u> : (1 Punkt)**

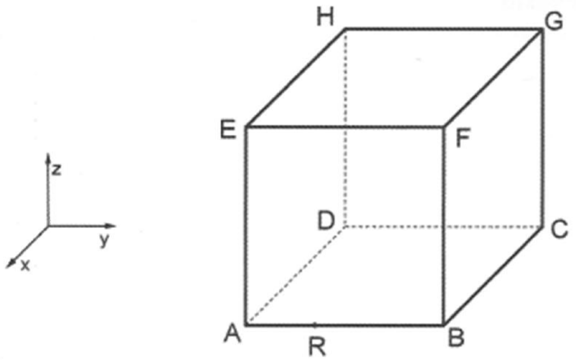
Die Vektoren $\vec{B}=\begin{pmatrix}B_A\\B_B\\B_C\end{pmatrix}$ bzw. $\vec{M}=\begin{pmatrix}M_A\\M_B\\M_C\end{pmatrix}$ geben die Anzahl der Burschen bzw. Mädchen in den drei Parallelklassen A, B und C an.

Kreuze die richtige(n) Aussage(n) an! Der Begriff Schüler ist geschlechtsneutral zu verstehen.

| | |
|---|---|
| Die Koordinaten des Vektors $\vec{B}+\vec{M}$ geben die Schülerzahlen der jeweiligen Klasse an. | ☒ |
| Insgesamt gibt es in den drei Parallelklassen $\lvert\vec{B}\rvert$ Burschen. | ☐ |
| $\vec{B}=2\cdot\vec{M} \;\Leftrightarrow$ Es gibt es in jeder der drei Klassen doppelt so viele Burschen wie Mädchen. | ☒ |
| Die drei Klassen unternehmen einen Ausflug. Jeder Schüler muss dafür p Euro bezahlen. Die Gesamtkosten der einzelnen Klassen sind aus dem Vektor $p\cdot\left(\vec{B}+\vec{M}\right)$ abzulesen. | ☒ |
| $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}M_A\\M_B\\M_C\end{pmatrix}$ ist die Anzahl der Mädchen in den drei Klassen zusammen. | ☒ |

**<u>Beispiel 4</u> : (1 Punkt)**

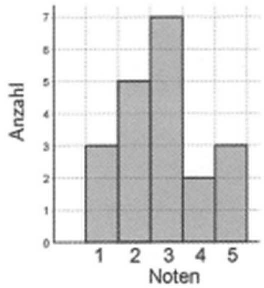
Die Grundfläche des Würfels liegt in der xy-Ebene.



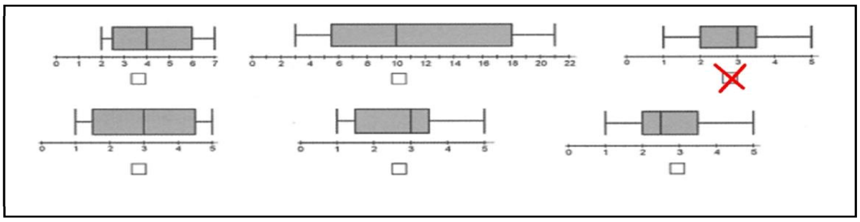

Kreuze die richtige(n) Aussage(n) an (s, t ∈ ℝ)!

| | |
|---|---|
| $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CG}=0$ | ☒ |
| $\overrightarrow{RC}=s\cdot\overrightarrow{AB}+t\cdot\overrightarrow{BC}$ | ☒ |
| $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{BG}$ | ☒ |
| $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}$ | ☐ |
| $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{FB}$ | ☐ |

**<u>Beispiel 5</u>: (1 Punkt)**
Die nebenstehende Graphik zeigt das Ergebnis einer Mathematik-Schularbeit.




Welcher der folgenden Boxplots stellt das Ergebnis der Schularbeit richtig dar?
Kreuze den zutreffenden Boxplot an!



**<u>Beispiel 6</u>: (1 Punkt)**
In einem Betrieb werden Leiterplatten auf schadhafte Lötstellen hin überprüft. Erfahrungsgemäß weiß man, dass 3% der Lötstellen einer Leiterplatte defekt sind.

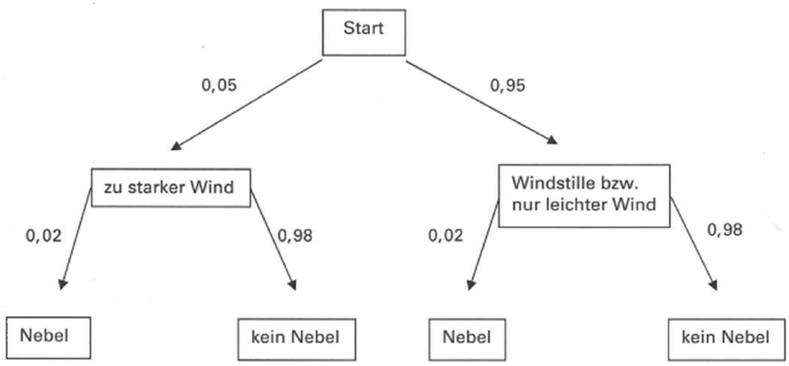
Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass von sechs getesteten Lötstellen mehr als eine defekt ist!

$P(X>1) = 1 - (P(X=0) + P(X=1)) = 1 - (0{,}97^6 + 6 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}97^5) = 1 - (0{,}833 + 0{,}155) = 0{,}0125$

**<u>Beispiel 7</u> : (1 Punkt)**

Skispringen ist als Freiluft-Sportart vom Wetter abhängig. Zwei Faktoren können zur Absage des Wettkamps führen: zu starker Wind und/oder Beeinträchtigung der Sicht durch Nebel.
Das Springen wird abgesagt bzw. unterbrochen, wenn mindestens eines der oben genannten Wetterphänomene beobachtet wird.
Gemäß den Wetteraufzeichnungen herrscht an fünf von 100 möglichen Wettkampftagen zu starker Wind, an zwei (von 100 Tagen) ist mit zu dichtem Nebel zu rechnen.

Im nachstehenden Baumdiagramm sind alle möglichen Fälle aufgelistet.




Ordne den einzelnen Ereignissen die entsprechende Wahrscheinlichkeit zu!

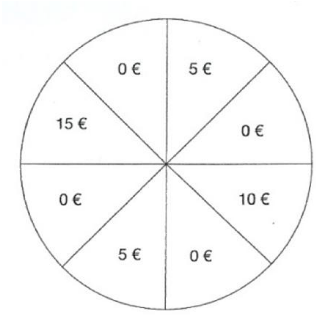
| | |
|---|---|
| Das Springen wird abgesagt/unterbrochen. | *B* |
| Das Springen kann stattfinden. | *E* |
| Genau ein Wetterphänomen führt zur Absage/zum Abbruch. | *D* |
| Es gibt Nebel und zu starken Wind. | *F* |

| | |
|---|---|
| A | $0{,}05 \cdot 0{,}02 + 0{,}95 \cdot 0{,}02$ |
| B | $0{,}05 \cdot (0{,}02 + 0{,}98) + 0{,}95 \cdot 0{,}02$ |
| C | $1 - (0{,}05 \cdot 0{,}02 + 0{,}95 \cdot 0{,}02)$ |
| D | $0{,}05 \cdot 0{,}98 + 0{,}95 \cdot 0{,}02$ |
| E | $1 - 0{,}05 \cdot (0{,}02 + 0{,}98) - 0{,}95 \cdot 0{,}02$ |
| F | $0{,}05 \cdot 0{,}02$ |

**Beispiel 8 : (1 Punkt)**

Das abgebildete Glücksrad ist in 8 gleich große Sektoren unterteilt, die mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Für einmaliges Drehen des Glücksrades muss ein Einsatz von 5 € gezahlt werden. Die Gewinne, die ausbezahlt werden, wenn das Glücksrad im entsprechenden Sektor stehen bleibt, sind auf dem Glücksrad abgebildet.

Das Glücksrad wird einmal gedreht. Berechne den entsprechenden Erwartungswert des Reingewinns G (in Euro) aus der Sicht des Betreibers des Glücksrades! Der Reingewinn ist die Differenz aus Einsatz und Auszahlungsbetrag.

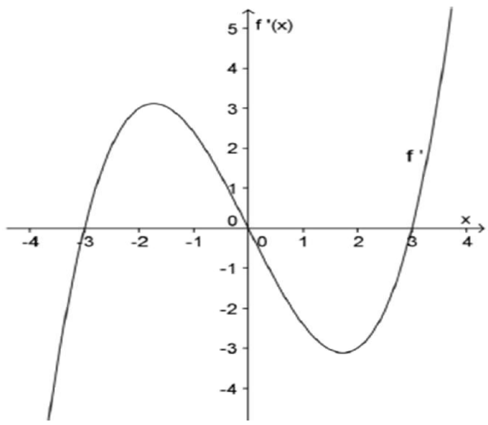



$G = 5 - \left( {}^{1}/_{8} \cdot 5 + {}^{1}/_{8} \cdot 0 + {}^{1}/_{8} \cdot 10 + {}^{1}/_{8} \cdot 0 + {}^{1}/_{8} \cdot 5 + {}^{1}/_{8} \cdot 0 + {}^{1}/_{8} \cdot 15 + {}^{1}/_{8} \cdot 0\right) =$

$5 - {}^{35}/_{8} = {}^{5}/_{8}$ € = 62.5 Cent.

**Beispiel 9 : (1 Punkt)**

Gegeben ist der Gra ph der Ableitungsfunktion f´einer Funktion f.




Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

| | |
|---|---|
| Die Funktion $f$ hat im Intervall [–4; 4] drei lokale Extremstellen. | ☒ |
| Die Funktion $f$ ist im Intervall (2; 3) streng monoton steigend. | ☐ |
| Die Funktion $f$ hat im Intervall [–3; 0] eine Wendestelle. | ☒ |
| Die Funktion $f''$ hat im Intervall [–3; 3] zwei Nullstellen. | ☒ |
| Die Funktion $f$ hat an der Stelle $x = 0$ ein lokales Minimum. | ☐ |

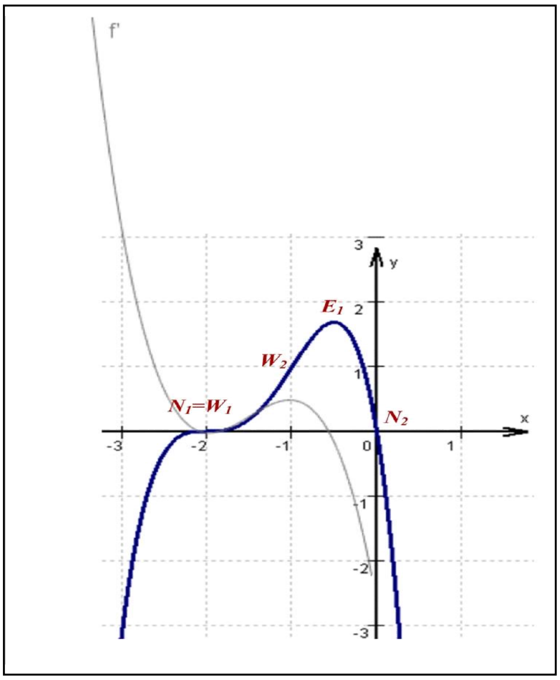
**Beispiel 10 : (1 Punkt)**

Ermittle die erste Ableitung der gegebenen Funktion: $f(x) = \sqrt[3]{(2x^2+3)^2}$

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \left(2x^2+3\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot 4x = \frac{8x}{3 \cdot \sqrt[3]{2x^2+3}}$$

**Beispiel 11 : (1 Punkt)**

Beschrifte Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte der Polynomfunktion f(x) und skizziere die Ableitungsfunktion f'(x) in das vorgegebene Koordinatensystem.




**Beispiel 12 : (1 Punkt)**

Von der Polynomfunktion *f* ist folgendes bekannt: *f*(2) = 0, *f* ´(2) = 0 und *f* ´´(2) = 1. Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Textbausteine so, dass eine mathematisch korrekte Aussage entsteht!

*f* hat an der Stelle ____①_____ sicher ____②_____ .

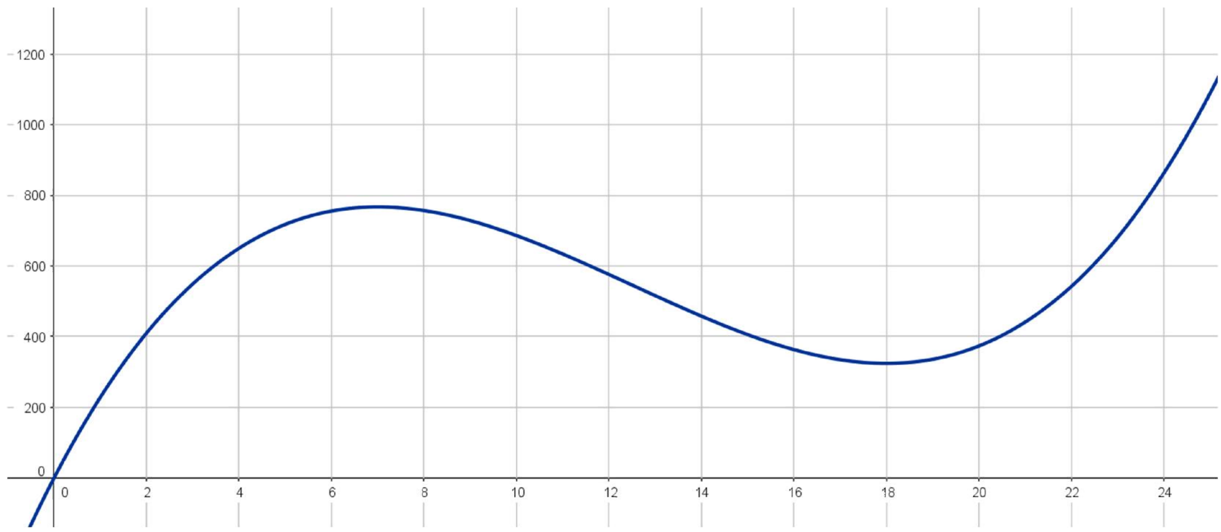
| ① | |
|---|---|
| *x* = 0 | |
| *x* = 1 | |
| *x* = 2 | X |

| ② | |
|---|---|
| ein lokales Minimum | X |
| ein lokales Maximum | |
| eine Wendestelle | |

## Teil II: Erweiterungsstoff (12 Punkte)

**<u>Beispiel 1</u>: (4 Punkte)**

Der Surfshop Mareblu in Lignano Pineta verkauft ab der heurigen Sommersaison neue Surfbretter Marketinganalysen haben ergeben, dass die zu erwartenden Verkaufszahlen in den nächsten 2 Jahren durch die Funktion $f(t) = {}^{2}/_{3}\, x^3 - 25x^2 + 252x$ modelliert werden können. Dabei beschreibt t die Zeit in Monaten ($0 \leq t \leq 24$)und f(t) die Anzahl der verkauften Surfbretter.




a) **(A)** Wie viele Surfbretter verkauft der Laden drei Monate nach der Einführung des Produkts? Nimmt zu diesem Zeitpunkt die Anzahl der verkauften Surfbretter zu oder ab?

f(3) = 549 Stück. Die Anzahl der verkauften Surfbretter nimmt zu diesem Zeitpunkt zu!

b) Ermittle rechnerisch jenen Zeitpunkt, an dem am meisten Surfbretter verkauft werden! Wieviel Stück sind es?

$f'(t) = 2x^2 - 50x + 252 = 0$. Man erhält $x_1 = 7$ und $x_2 = 18$. Am meisten Surfbretter werden zum Zeitpunkt t=7 Monate verkauft (lokales Maximum). Die Anzahl beträgt f(7) = 767,66, d.h. ca. 768 Surfbretter.

c) Um langfristig planen zu können, will der Surfshop eine umfangreiche Werbekampagne vorbereiten. Diese soll zu jenem Zeitpunkt starten, an dem der Verkauf von Surfbrettern am stärksten stagniert. Berechne den Zeitpunkt, an dem die Werbekampagne starten soll und interpretiere den Zeitpunkt im inhaltlichen Kontext!

Stärkster Rückgang entspricht Minimum der Tangentensteigungen und daher dem Wendepunkt der Funktion, daher 2. Ableitung:

$f''(t) = 4x - 50 = 0$, daraus erhält man x= 12,5. Werbekampagne soll nach 12,5 Monaten starten!

d) Interpretiere das lokale Minimum der Funktion f(t) im inhaltlichen Kontext!

Zeitpunkt t=18mit den geringsten Verkaufszahlen, d.h. umsatzschwächster Punkt. Für t>18 sind die Tangentensteigungen der Funktion f(t) positiv, d.h. die Änderungsrate der Verkaufszahlen positiv, die Verkaufszahlen steigen in zunehmendem Maße (Linkskrümmung der Funktion)

**Beispiel 2: (4 Punkte)**

Schätzungen zufolge sind etwa 12% der Bevölkerung Linkshänder. In einer Stadt spielen 4% der Linkshänder und 6% der Rechtshänder Tennis.

a) Zeichne eine Vierfeldertafel, die die vorgegebenen Informationen übersichtlich zusammenfasst!

| | Linkshänder | Rechtshänder | Summe |
|---|---|---|---|
| Tennisspieler | $0{,}04 \cdot 0{,}12 = 0{,}0048$ | $0{,}06 \cdot 0{,}88 = 0{,}0528$ | 0,0576 |
| Nicht Tennisspieler | $0{,}96 \cdot 0{,}12 = 0{,}1152$ | $0{,}94 \cdot 0{,}88 = 0{,}8272$ | 0,9424 |
| Summe | 0,12 | 0,88 | 1 |

b) **(A)** Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass von 20 zufällig ausgewählten Einwohnern dieser Stadt höchstens 2 Tennis spielen!

Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Tennisspieler an.

$P(X\leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 0{,}9424^{20} + 20\cdot 0{,}0576 \cdot 0{,}9424^{19} + 190 \cdot 0{,}0576^{2} \cdot 0{,}9424^{18} =$ $0.3052850582 + 0.3731837723 + 0.2166873517 = 0.8951561823$

c) Wie viele Einwohner müsste man auf der Straße zufällig ansprechen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% zumindest einen linkshändigen Tennisspieler zu treffen?

P(zumindest 1 linkshändiger Tennisspieler) $\geq 0{,}95$, d.h.

1 – P(kein linkshändiger Tennisspieler) $\geq 0{,}95$, d.h.

P(kein linkshändiger Tennisspieler) $<0{,}05$, d.h.

$0{,}9952^{n} < 0{,}05$. Durch logarithmieren erhält man $n>622{,}61$, d.h. zumindest 623 Personen.

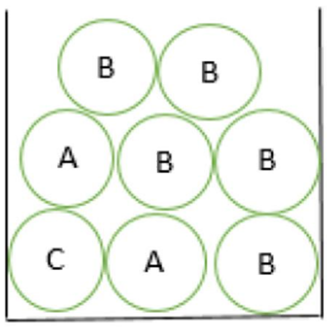
d) Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der rechtshändigen Tennisspieler an. Es werden zufällig 300 Einwohner aus dieser Stadt ausgewählt. Bestimme Erwartungswert und Standardabweichung der Zufallsvariablen X!

P(rechtshändiger Tennisspieler) = 0,0528

$E(X) = 300 \cdot 0{,}0528 = 15{,}84$. $\sigma = 3{,}873$

**Beispiel 3: (4 Punkte)**

Ein Supermarkt wirbt für den Verkauf von Buchstabensuppen. Am Verkaufsstand wird folgendes Spiel angeboten. Für den Einsatz von 2 € darf man zweimal eine Kugel auf der abgebildeten Urne ziehen, wobei die Kugel nach dem Ziehen wieder zurückgelegt wird.



Zieht man zweimal denselben Buchstaben, erhält man eine Packung Buchstabensuppe (im Wert von 0,99.-€) gratis, zieht man zweimal den Buchstaben „A“, erhält man 5 Packungen Buchstabensuppe (im Wert von 4,95.-€) gratis. Zieht man zweimal den Buchstaben „C“, erhält man 20 Packungen Buchstabensuppe (im Wert von 19,8.-€) gratis.

a) Wie hoch ist die der Erwartungswert für den Gewinn (die Gewinnerwartung) je Spiel?

| | 2 mal denselben Buchst. | (A,A) | (C,C) | sonst |
|---|---|---|---|---|
| Einsatz | 2€ | 2€ | 2€ | 2€ |
| P(Ereignis) | $^{30}/_{64}$, davon $^{4}/_{64}$ mit Auszahlung 4,95€, $^{1}/_{64}$ mit Auszahlung 19,80€, d.h. $^{25}/_{64}$ mit Auszahlung 0,99€ | $^{4}/_{64}$ | $^{1}/_{64}$ | $^{34}/_{64}$ |
| Auszahlung | 0,3867€ | 0,309375€ | 0,309375€ | -1,0625€ |

Zu erwartender Gewinn je Spiel: -0,057€,d.h. negative Gewinnerwartung auf lange Sicht!

b) Ein Werbeberater schlägt vor, im Falle „zweimal C“ nur 15 Packungen herzuschenken. Wird das Spiel dadurch für den Kunden oder für den Veranstalter attraktiver? Begründe Deine Entscheidung!
Spiel wird für den Kunden weniger attraktiv, denn trotz gleicher Gewinnwahrscheinlichkeit bei (C, C) wird weniger (nämlich nur 14,85€) ausbezahlt!

c) Greta Glück hat 5 Spielrunden gespielt und dabei viermal den gesamten Einsatz verloren. Wie wahrscheinlich ist ein solches oder noch schlechteres Ereignis?
P(Verlust) = $^{34}/_{64}$. P(mindestens 4 mal Verlust) = P(X=4) + P(x=5) =
$5 \cdot (^{34}/_{64})^4 \cdot (^{30}/_{64}) + (^{34}/_{64})^5 = 0{,}18668 + 0{,}0423 = 0{,}229$

d) Wie hoch muss der Spieleinsatz mindestens sein, damit der Supermarkt mit dem Spiel Geld verdienen kann?
Die Summe der zu erwartenden Auszahlungen beträgt: 1,005€ und muss durch die Verlustwahrscheinlichkeit von $^{34}/_{64}$ zumindest gedeckt sein. Das heißt: Für den Spieleinsatz S muss gelten: $^{34}/_{64} \cdot S = 1{,}005$. S = 1,89€, d.h. mindestens dieser Einsatz!