2. Mathematikschularbeit 7a
3.3.2017

Name: ________________________________

Punkte: ________________________________

Note: ________________________________

Unterschrift: ________________________________

Punkteschlüssel

Note	Sehr Gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht Genügend
Punkte	24-20	19-16	15-12	11-8	< 8

wobei jeweils zumindest 8 Grundkompetenzpunkte erreicht werden müssen!

Viel Erfolg!

	Teil 1	Teil 2	Teil 2/Komp. Teil 1	Gesamtpunkte
Punkte	__/12P	__/12P	__/2P	__/24P

Hinweise:

- **Teil 1** prüft „das Wesentliche“ ausgewählter Themenbereiche. Die Aufgaben in Teil 1 werden mit insgesamt 12 Punkten bewertet, jede Aufgabe mit 1 Punkt. Um eine positive Beurteilung zu erhalten, sind in jedem Fall zumindest $^{2}/_{3}$ der Punkte in diesem Bereich - das sind 8 Punkte - zu erreichen.
- **Teil 2** umfasst den „Erweiterungsstoff“. In den drei Aufgaben können insgesamt 12 Punkte erreicht werden. Es können zwei Ausgleichspunkte (gekennzeichnet mit **A**) für den Teil 1 erworben werden.
- Sowohl in **Teil 1** als auch **Teil 2** darf der Taschenrechner als Hilfsmittel verwendet werden. Alle Rechenwege müssen jedoch nachvollziehbar angeschrieben werden.

Teil I: Grundkompetenzen (12 Punkte)

<u>Beispiel 1</u> : (1 Punkt)

Welche der im folgenden angeführten Aussagen gelten? Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an!

Jede reelle Zahl ist eine irrationale Zahl	□
Jede reelle Zahl ist eine komplexe Zahl	■
Jede rationale Zahl ist eine ganze Zahl	□
Jede ganze Zahl ist eine natürliche Zahl	□
Jede natürliche Zahl ist eine reelle Zahl	■

<u>Beispiel 2</u> : (1 Punkt)

Viele Anwendungsbereiche lassen sich durch lineare Funktionen beschreiben. Auf welche der folgenden Situationen trifft dies zu? Kreuze die zutreffende(n) Aussage(n) an!

■ Der jährliche Wertverlust einer Maschine (durch Gebrauch) beträgt 5% ihres Neupreises

□ Die Schadstoffbelastung in Ballungszonen steigt jährlich um etwa 3%

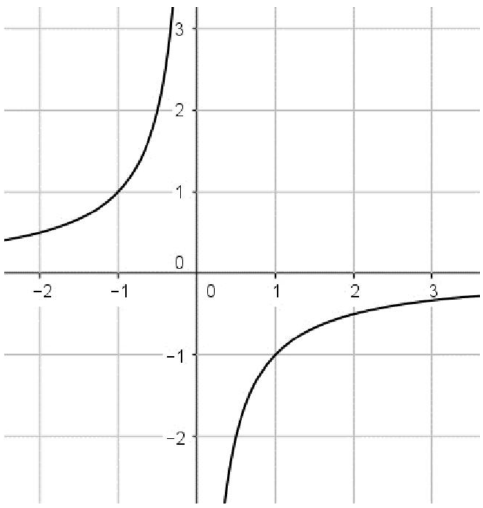
□ Die Anzahl einer Insektenart verdoppelt sich alle 2 Jahre

■ Die Geschwindigkeit eines für 5 Sekunden konstant beschleunigten Körpers in diesem Zeitraum

■ Die mittlere Jahrestemperatur steigt jährlich um 0,5°C

<u>Beispiel 3</u> : (1 Punkt)

In der nebenstehenden Graphik ist eine Funktion der Form f(x) $= a \cdot x^z, a \in R, a \neq 0, z \in Z$, dargestellt. Welche der folgenden Funktionsgleichungen ist die Gleichung der Funktion?



□ $f(x) = 2 \cdot x^{-2}$	■ $f(x) = -x^{-1}$
□ $f(x) = 2 \cdot x^{2}$	□ $f(x) = -2 \cdot x^{-1}$

<u>Beispiel 4</u> : (1 Punkt)

Gegeben ist die Funktion f(t) = e^{t+1}. Kreuze die zutreffende(n) Aussage(n) an!

□ Die mittlere Änderungsrate im Intervall [1; 2] ist negativ.

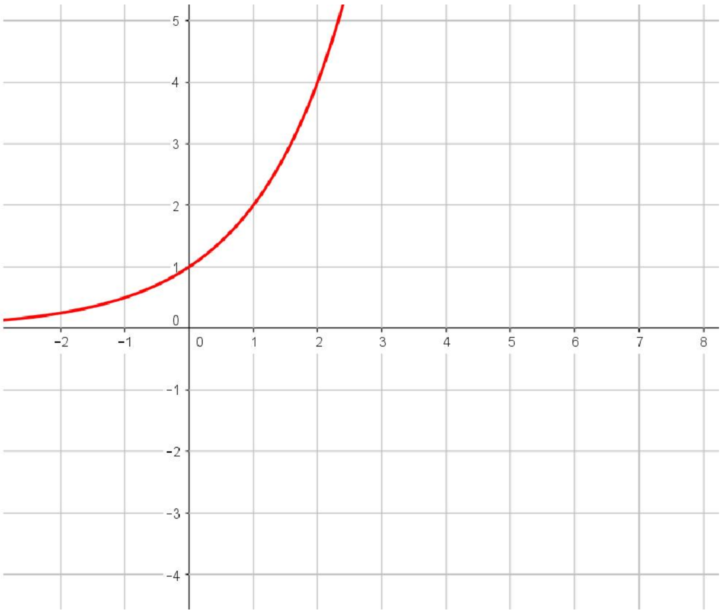
■ Die Steigung der Tangente an f(t) in P(0 | f(0)) ist k_t = e

■ f(t) ist im gesamten Verlauf streng monoton steigend.

□ f(t) besitzt genau ein lokales Minimum.

Beispiel 5 : (1 Punkt)

In der nebenstehenden Graphik ist die Funktion f(x) = 2^x dargestellt. Zeichen die Funktion g(x) = $^2\lg(x)$ in das vorgegebene Koordinatensystem ein!



Beispiel 6 : (1 Punkt)

Vervollständige die Tabelle und kreuze die zutreffende(n) Aussage(n) an!

Funktion f(x)	Gerade Funktion	Max. Definitionsbereich	Ableitungsfunktion f ´(x)
$f(x) = \cos(2x)$	■	D=R	- 2 sin (2x)
$f(x) = \sqrt{x}$	□	$D = R_0^+$	$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$

Beispiel 7 : (1 Punkt)

Im folgenden sind Aussagen über Polynomfunktionen vorgegeben. Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an!

□ Jede Polynomfunktion dritten Grades besitzt 3 Monotoniebereiche

■ Eine Polynomfunktion dritten Grades kann maximal zwei lokale Extremwerte haben

□ Eine Polynomfunktion dritten Grades hat immer mehr Nullstellen als Extremwerte

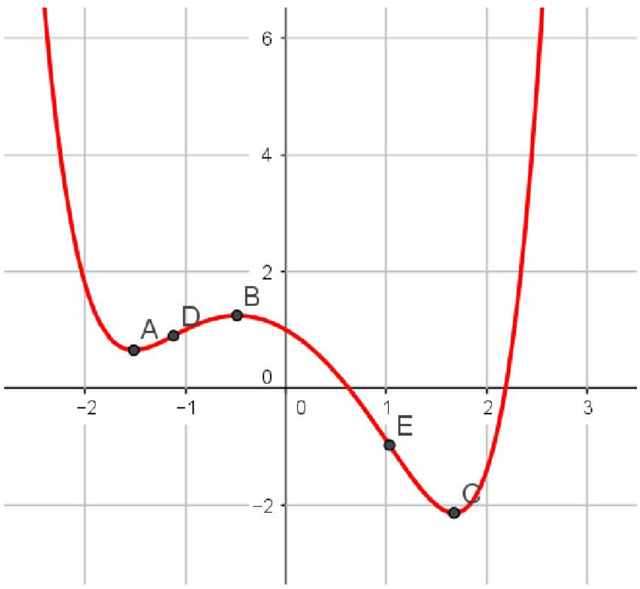
■ Eine Polynomfunktion dritten Grades hat mindestens eine Nullstelle

□ Eine Polynomfunktion dritten Grades hat stets zwei Wendepunkte

Beispiel 8 : (1 Punkte)

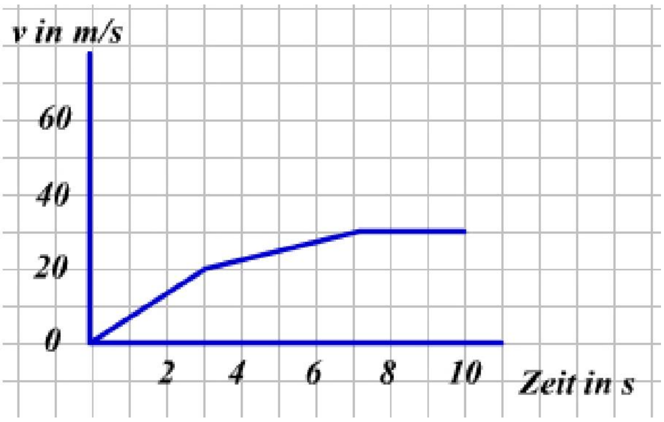
Welche der folgenden Aussagen treffen auf die dargestellte Funktion f(x) zu?

□ A ist Nullstelle
■ B ist lokales Maximum
■ C ist globales Minimum
■ f(x) ist in [-1; 1[rechtsgekrümmt
□ f(x) ist in [1; 2] monoton steigend



Beispiel 9 : (1 Punkt)

Gegeben ist das nebenstehende Geschwindigkeitsdiagramm, das die Bewegung eines Körpers während 10 Sekunden beschreibt. Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an!



■ Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t=5 beträgt 25 $^{m}/_{s}$

□ Die Beschleunigung im Zeitintervall [0; 2] ist kleiner als jene im Zeitintervall [4; 5]

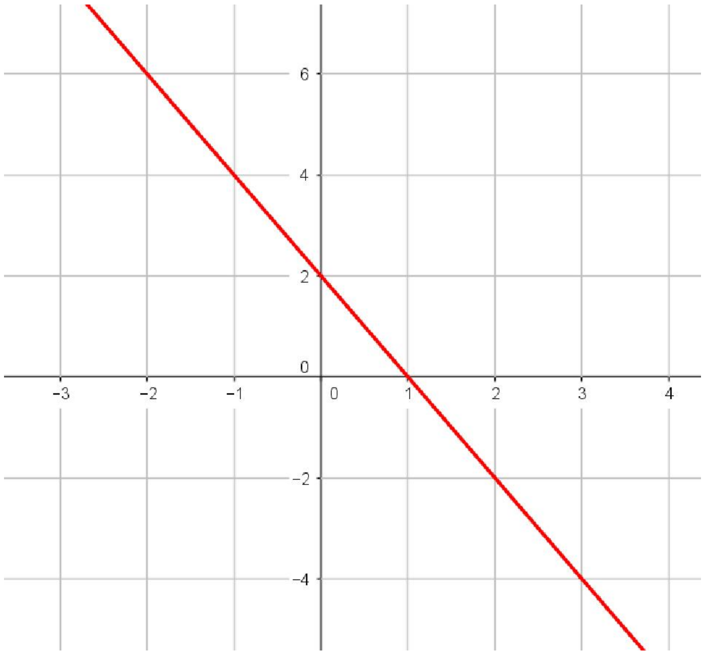
□ Die Höchstgeschwindigkeit wird nach 10 Sekunden erreicht

■ Der Körper beschleunigt im Zeitintervall [0; 7]

□ Die Durchschnittsgeschwindigkeit im Intervall [0; 10] beträgt 3$^{m}/_{s}$

Beispiel 10 : (1 Punkt)

Die nebenstehende Graphik stellt die erste Ableitung f ´ (x) einer Funktion f(x) dar. Zeichne den Graphen von f(x) in das Koordinatensystem ein!



Beispiel 11 : (1 Punkt)

Die nebenstehende Graphik stellt die erste Ableitung f ´ (x) einer Funktion f(x) dar. Kreuze die beiden für f(x) zutreffenden Aussagen an!

□ f(0) = 2

■ f(x) hat keinen Wendepunkt

■ f(x) ist in [-2; 0] streng monoton steigend

□ f(x) hat bei x=1 ein lokales Minimum

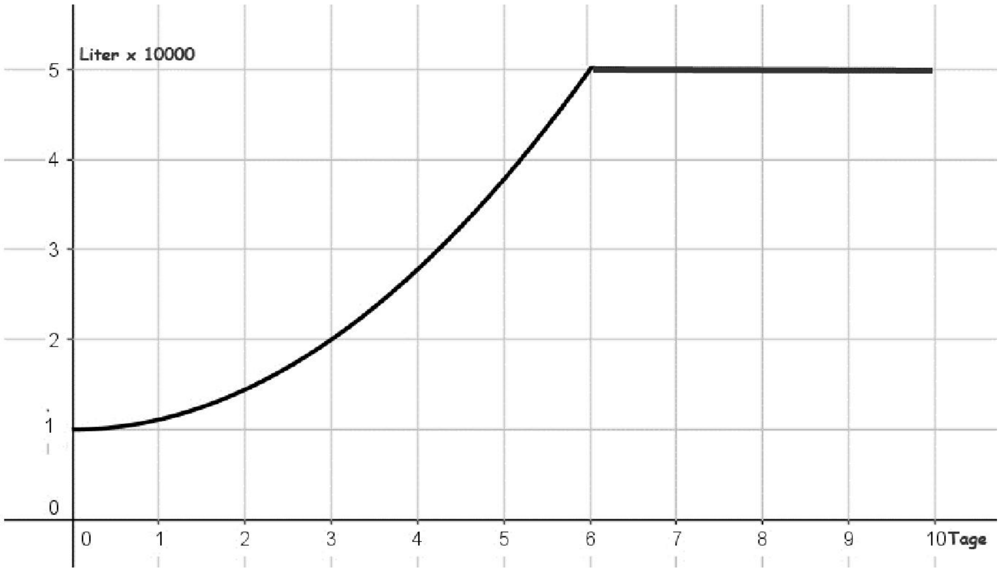
Beispiel 12 : (1 Punkt)

Gegeben ist die Funktion f(x) = cos(x). Bestimme jene Werte u, für die gilt: f(u) = 0,5!

u=60° bzw. 300°.

Teil II: Erweiterungsstoff (12 Punkte)

Beispiel 1: (4 Punkte)



Die nebenstehende Graphik gibt die Zuflussgeschwindigkeit (in Liter pro h) im Zeitraum von 10 Tagen an, mit der ein Staubecken gefüllt wird. Die Zuflussgeschwindigkeit kann dabei in den ersten 6 Tagen mit Hilfe einer Funktion

$f(t)=at^2 + b$ modelliert werden, danach ist die Zuflussgeschwindigkeit konstant.

a)(*)(1 Punkt) Wie groß ist die mittlere Zunahme der Zuflussgeschwindigkeit innerhalb der ersten 3 Tage?

$$f(t) = \frac{\bar{f}(3) - f(0)}{3} = \frac{1}{3} = 3333l$$

b) (2 Punkte) Bestimme die Konstanten a und b der Funktion! Wieviel Liter fließen zum Zeitpunkt t=3 in das Staubecken?

Es gilt wegen f(0)=1 b=1 und aus f(6)=5 berechnet man $a={}^{1}/_{9}$

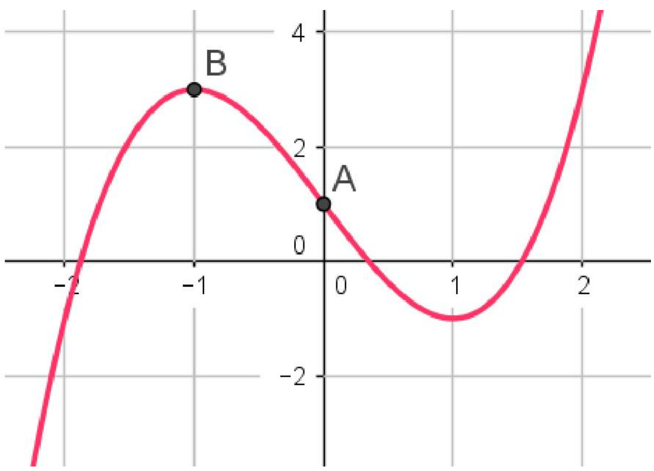
$f(t) = {}^{1}/_{9}\, t^2 + 1$, daher f(3) = 2 = 20000 Liter / h.

b)(*) (1 Punkt) Zu welchem Zeitpunkt ist die Änderungsrate der Zuflussgeschwindigkeit am größten und wie groß ist sie? Zum Zeitpunkt t=6

Für $f\,'(t) = {}^{2}/_{9}\, t$, daher $f\,'(6) = {}^{4}/_{3}$ = 13333 Liter.

Beispiel 2: (4 Punkte)

Die nebenstehende Graphik zeigt den Verlauf einer Polynomfunktion dritten Grades. Die Funktion hat in A(0 | 1) einen Wendepunkt und in B(- 1 | 3) ein lokales Maximum.



a)(*) Begründe, weshalb eine Polynomfunktion dritten Grades stets eine Wendepunkt hat!

Die zweite Ableitung ist eine lineare Funktion und hat stets eine reelle Lösung.

b) (1 Punkt) Stelle entsprechende Bedingungen auf, mit deren Hilfe man aus den gegebenen Informationen die Gleichung der Funktion bestimme kann.

Es gilt:

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f´(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f´´(x) = 6ax + 2b$

Es gelten die Bedingungen:

$f(0) = 1$, daher: $d = 1$

$f´´(0) = 0$, daher: $b = 0$

$f´(-1) = 0$, daher: $3a – 2b + c = 0$

$f(-1) = 3$, daher: $- a + b – c + d = 3$

Es bleiben nur die vereinfachten Gleichungen:

$3a + c = 0$ und

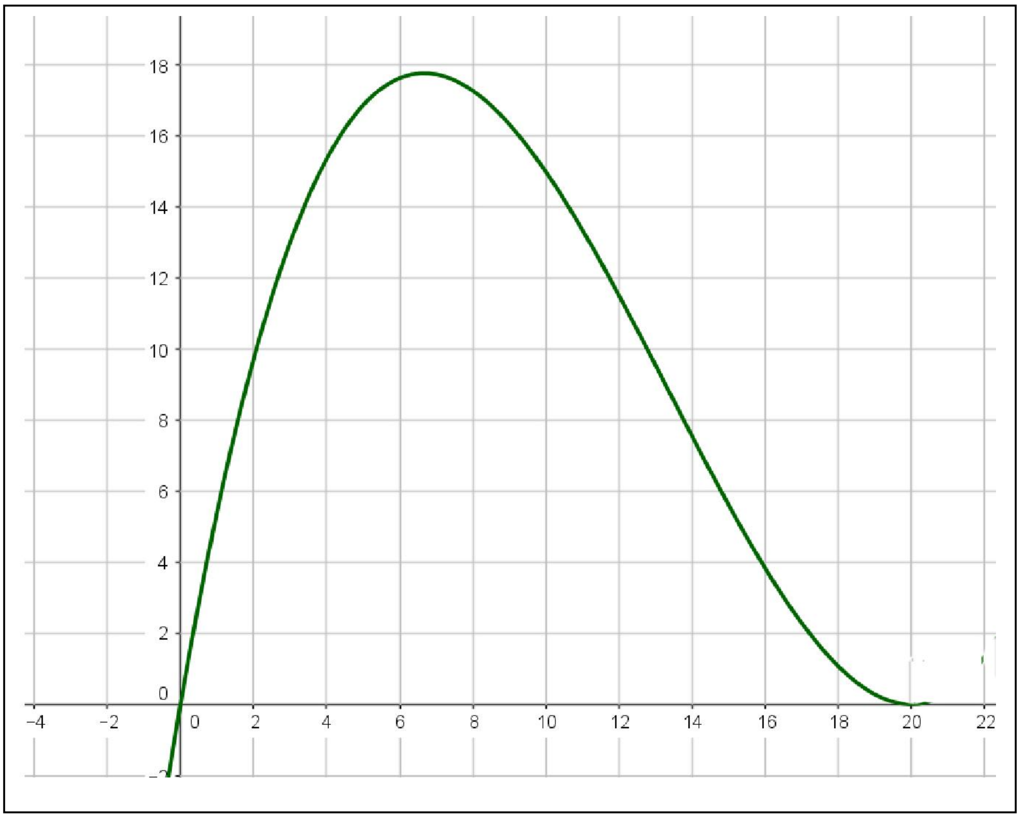
$- a – c =2$

Daraus bestimmt man $a=1$ und $c = - 3$. Die Gleichung der Funktion lautet daher:

$f(x) = x^3 – 3x + 1$.

<u>Beispiel 3</u>: (4 Punkte)

Innerhalb einer Studie soll die Konzentration eines oral zu verabreichenden Medikamentes im Blut untersucht werden. In der Zeitspanne zwischen der Verabreichung des Medikamentes bis zum vollständigen Abbau des Medikamentes wird die Wirkstoffkonzentration im Blut der Probanden (in $^{mg}/_{l}$) durch eine ganzrationale Funktion



W(t) beschrieben.

Die nebenstehende Graphik zeigt den Verlauf der Funktion W(t).

a) Zeichne jenen Zeitpunkt in die Graphik ein, an dem die Abbaurate des Medikaments am größten ist und begründe seine Lage!
   Die Abbaurate ist am Wendepunkt von Rechts- auf Linkskrümmung am größten, da die Funktion dort den größten negativen Zuwachs hat (kleinster Wert der Tangentensteigung!) $W(^{40}/_{3} \mid {}^{80}/_{9})$

b) Erkläre die Bedeutung der ersten Ableitung $W'(t)$ im Sachzusammenhang!
   Erste Ableitung gibt die Änderungsrate der Wirkstoffkonzentration zum Zeitpunkt t an!

c) Für die Funktionsgleichung W(t) gilt: $W(t) = 0{,}015\,t^3 - 0{,}6t^2 + 6t$
   Berechne mit Hilfe der Funktionsgleichung die mittlere Änderungsrate der Wirkstoffkonzentration im Zeitintervall [2; 4]!

$$\overline{W} = \frac{W(4) - W(2)}{2} = \frac{\frac{384}{25} - \frac{243}{25}}{2} = \frac{141}{50} = 2{,}82$$

d) Berechne mit Hilfe der Funktionsgleichung jenen Zeitpunkt, an dem die Wirkstoffkonzentration am größten ist!
   $W'(t) = 0{,}045\,t^2 - 1{,}2t + 6 = 0$ liefert die Lösungen $t_1 = {}^{20}/_{3}$ und $t_2 = 20$, daher zum Zeitpunkt $t = {}^{20}/_{3}$.