1. Mathematikschularbeit 7a
23.11.2016

Name: ______________________________

Punkte: ______________________________

Note: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Punkteschlüssel

Note	Sehr Gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht Genügend
Punkte	24-20	19-16	15-12	11-8	< 8

wobei jeweils zumindest 8 Grundkompetenzpunkte erreicht werden müssen!

Viel Erfolg!

	Teil 1	Teil 2	Teil 2/Komp. Teil 1	Gesamtpunkte
Punkte	__/12P	__/12P	__/2P	__/24P

Hinweise:

- **Teil 1** prüft „das Wesentliche“ ausgewählter Themenbereiche. Die Aufgaben in Teil 1 werden mit insgesamt 12 Punkten bewertet, jede Aufgabe mit 1 Punkt. Um eine positive Beurteilung zu erhalten, sind in jedem Fall zumindest $^2/_3$ der Punkte in diesem Bereich - das sind 8 Punkte - zu erreichen.
- **Teil 2** umfasst den „Erweiterungsstoff“. In den drei Aufgaben können insgesamt 12 Punkte erreicht werden. Es können zwei Ausgleichspunkte (gekennzeichnet mit **A**) für den Teil 1 erworben werden.
- Sowohl in **Teil 1** als auch **Teil 2** darf der Taschenrechner als Hilfsmittel verwendet werden. Alle Rechenwege müssen jedoch nachvollziehbar angeschrieben werden.

Teil I: Grundkompetenzen (12 Punkte)

<u>Beispiel 1</u> : (1 Punkt)

Kreuze die beiden richtigen Aussagen an!

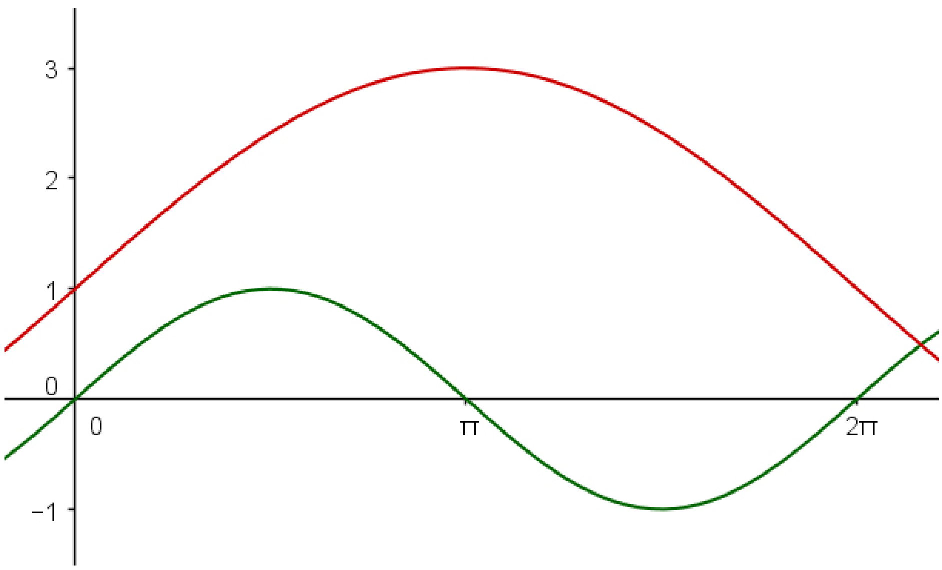
$\sqrt{n}$ (mit n ∈ ℕ) ist immer irrational.	○
Jede reelle Zahl lässt sich als Bruch darstellen.	○
Unendliche periodische Dezimalzahlen sind rational.	■
Die Zahlengerade ist mit den rationalen Zahlen nicht lückenlos gefüllt.	■
Die Menge der ganzen Zahlen und die Menge der rationalen Zahlen bilden zusammen die Menge der reellen Zahlen.	○

<u>Beispiel 2</u> : (1 Punkt)

Ein Körper bewegt sich mit der Geschwindigkeitsfunktion v(t) = 50 – t^2. Was bedeutet $\bar{v}[2;5] = \frac{v(5) - v(2)}{5 - 2}$? Mittlere Beschleunigung (Geschwindigkeitsänderung) im Intervall [2; 5]

<u>Beispiel 3</u> : (1 Punkt)

Zeichne die Funktionen $f_1 : y = \sin(x)$ und $f_2 : y = 2 \cdot \sin\,(0{,}5x) + 1$ in das vorgegebene Koordinatensystem!



<u>Beispiel 4</u> : (1 Punkt)

Die mittlere Änderungsrate der Funktion u(t) = $2t^2$ – t im Intervall [1; 3] beträgt

□ 4 □ – 7 ■ 7 □ 14

<u>Beispiel 5</u> : (1 Punkt)

Dreizehn Studenten geben ihre monatlichen Ausgaben in € wie folgt an:

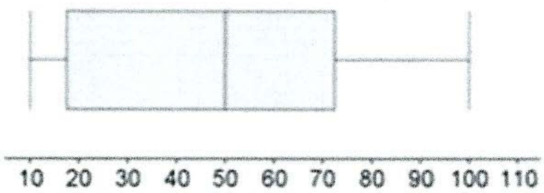
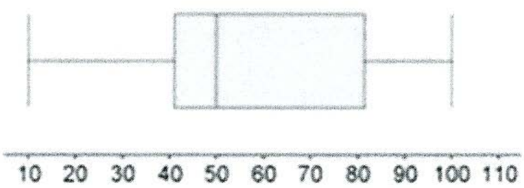
| 1300 | 1200 | 1400 | 700 | 200 | 750 | 1450 | 1500 | 800 | 800 | 950 | 900 | 3000 |

Berechne das arithmerische Mittel, den Median sowie den Modalwert!

Arithm. Mittel: 1150 Median: 950 Modalwert: 800

<u>Beispiel 6</u> : (1 Punkt)

In der nachstehenden Tabelle sind jeweils ein Boxplot und drei sortierte Datenreihen gegeben.
Kreuze an, welche Datenreihe zum jeweiligen Boxplot gehört und begründe deine Entscheidung! [Reihe B bzw. Reihe A] – problematisch, da die Ermittlung der Quartile nicht einheitlich festgelegt ist!]

Boxplot	A	B	C	Begründung
				
	10	10	10	
	19	11	11	
	37	15	12	
	45	20	13	
	47	29	16	
	50	33	18	
	50	50	50	
	72	52	70	
	76	56	75	
	80	70	79	
	83	75	80	
	85	80	80	
	100	100	100	
				
	10	10	10	
	19	11	11	
	37	15	12	
	45	20	13	
	47	29	16	
	50	33	18	
	50	50	50	
	72	52	70	
	76	56	75	
	80	70	79	
	83	75	80	
	85	80	80	
	100	100	100	

<u>Beispiel 7</u> : (1 Punkt)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 - 1$. Bestimme die Gleichung der Tangente an f(x) im Punkt P(1 | f(1))!

P(1 | 0), daher $f'(x) = 2x$ und $k_t=2$, daher: $y=kx+d$ und $0=2+d$, daher t: $y=2x - 2$.

Beispiel 8 : **(1 Punkte)**

Eine ideale Münze wird mehrfach geworfen (Versuchsausgänge: Kopf bzw. Adler)

Ordne den Zufallsexperimenten die richtigen Zahlenwerte zu!

Zufallsexperiment	
Eine Münze wird viermal geworfen. Wahrscheinlichkeit, dass genau zweimal „Kopf" fällt.	
Eine Münze wird viermal geworfen. Wahrscheinlichkeit, dass genau beim ersten und beim zweiten Wurf „Kopf" fällt, sonst „Adler".	
Eine Münze wird fünfmal geworfen. Wahrscheinlichkeit, dass mindestens dreimal „Kopf" fällt.	

Zahlenwert	
$\frac{1}{2}$	A
$\frac{1}{4}$	B
$\frac{1}{16}$	C
$\frac{3}{8}$	D
$\frac{5}{8}$	E

[1 D, 2 C, 3 A]

Beispiel 9 : **(1 Punkt)**

In einem Gefäß befinden sich drei rote und sieben blaue Kugeln.

Berechne die Wahrscheinlichkeit, bei dreimaligem Ziehen ohne Zurücklegen mindestens eine rote Kugel zu ziehen!

P(mindestens eine Kugel rot) = 1 – P(keine rote Kugel) = $1 - {}^{7}/_{10} \cdot {}^{6}/_{9} \cdot {}^{5}/_{8} = {}^{17}/_{24}$.

Beispiel 10 : **(1 Punkt)**

Die folgende Tabelle enthält Informationen über Geschlecht und Sehvermögen einer Gruppe von 200 Personen. Aus dieser Gruppe wird zufällig eine Person ausgewählt.

	Männer	Frauen	Summe
Brille	40	25	65
keine Brille	100	35	135
Summe	140	60	200

a) Die ausgewählte Person ist männlich. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie Brillenträger ist?

b) Die ausgewählte Person ist Brillenträger. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie männlich ist?

[a) ${}^{2}/_{7}$ b) ${}^{8}/_{13}$

Beispiel 11 : **(1 Punkt)**

Kreuze die für die Funktion $f(x) = x^3 - 3x$ zutreffenden Aussagen an!

□ $f(1) = 0$ ■ $f\,'(1) = 0$ ■ f(x) hat 3 Nullstellen ■ □ f(x) ist in x_1=0 str. m. fallend

Beispiel 12 : **(1 Punkt)**

Bestimme für die Funktion $f(x) = 2x^3 - x$ an den Stellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 0$ die Monotonie. Was lässt sich daraus über den Verlauf von f(x) im Intervall [-1; 0] aussagen? Begründe!

$f'(x) = 6x^2 - 1$, daher $f'(-1) = 5 > 0$ und $f'(0) = -1 < 0$, d.h. es muss dazwischen eine Stelle x mit waagrechter Tangente (allenfalls ein lokales Maximum) geben!

Teil II: Erweiterungsstoff (12 Punkte)

<u>Beispiel 1</u>: (4 Punkte)

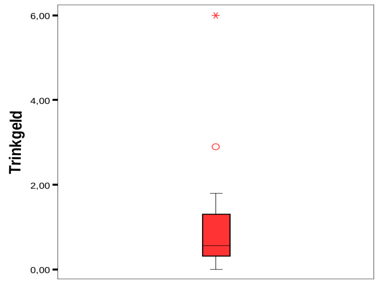
In einem Ausflugslokal wurden im Laufe des Nachmittags von den Kunden folgende Rechnungen in Euro bezahlt:

Rechnungsnummer	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
Rechnungsbetrag	12,00	9,30	9,70	8,90	32,10	28,20	5,60	3,40	42,20	23,00	15,70	54,00
Erhaltener Betrag	12,50	10,00	10,00	9,50	35,00	30,00	6,00	3,50	43,00	23,00	16,00	60,00
Trinkgeld	0,50	0,70	0,30	0,60	2,90	1,80	0,40	0,10	0,80	0	0,30	6,00
Trinkgeld in % des Rechnungsbetrags	4,17%	7,54%	3,09%	6,74%	9,03%	6,38%	7,14%	2,94%	1,89%	0%	1,91%	11,11%

a) Wie viel Euro wurden pro Rechnung durchschnittlich an Trinkgeld gegeben?
Berechne dazu das arithmetische Mittel, den Modalwert und den Median! **(A)**
Arithm: Mittel: 1,2€, Median: 0,55€, Modalwert: 0,3€

b) Auf welche Zentralmaße wirkt sich eine Veränderung des 12. erhaltenen Betrages von 60€ auf 70€ aus?
Nur auf das arithmetische Mittel!

c) Erstelle ein Kastenschaubild für die Trinkgelder in Euro! Welche Bedeutung haben in diesem Zusammenhang die Intervalle $[0;q_1]$ bzw. $[q_1; q_2]$?



d) Welche Auswirkung hätte es auf die Zentralmaße, wenn die 12. Rechnung in zwei gleiche Teile gesplittet wird, wie in der folgenden Tabelle angegeben?

12.	13.
27	27
30	30

Arithmetisches Mittel wird kleiner, Median wird größer!

Beispiel 2: (4 Punkte)

Etwa ein Drittel der US-amerikanischen Haushalte besitzt heute noch Waffen. Das ist deutlich weniger als noch vor 40 Jahren (Umfrage der General Global Survey). Gleichzeitig meldeten Hersteller einen stark gestiegenen Absatz seit den Amokläufen. Die drei Damen der 7A, die im vergangenen Schuljahr in den USA waren, waren prinzipiell in zufälligen Haushalten untergebracht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) alle drei Schülerinnen bei Waffenbesitzern landeten? [$^{1}/_{27}$]

b) mindestens eine Schülerin einen Haushalt ohne Waffen vorfand? [$^{26}/_{27}$]

c) In Hunting Town gibt es nur 12 Haushalte, von denen allerdings 9 Waffen besitzen. Der Sheriff kontrolliert zufällig 3 Haushalte und beschlagnahmt gegebenenfalls die Waffen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er keine Waffen findet? Erkläre den Unterschied zu a)!

[P(Waffen) = $^{9}/_{12}$ = $^{3}/_{4}$. Auswahl entspricht „ohne Zurücklegen", daher:

P(findet keine Waffen) = $^{3}/_{12} \cdot {}^{2}/_{11} \cdot {}^{1}/_{10} = {}^{6}/_{1320}$ = 0,0045, das sind 0,45%.

Beispiel 3: (4 Punkte)

Es ist allgemein bekannt, dass sich die Taglänge innerhalb eines Jahres entsprechend den Jahreszeiten ändert. Die folgende Tabelle zeigt die Taglängen für Wien im Jahresverlauf 2016 ohne Berücksichtigung der Sommerzeit (Quelle: NavalObservatory, USA). Die Tage werden der Einfachheit halber vom 22.12.2015 aus durchnummeriert.

Datum	Tagnummer	Sonnenaufgang	Sonnenuntergang	Taglänge (in min)
22.12.2015	0	07:43	16:03	500
22.01.2016	31	07:35	16:37	542
22.03.2016	91	05:53	18:10	737
22.06.2016	183	03:54	19:59	965
22.07.2016	213	04:18	19:43	925
22.10.2016	305	06:25	16:52	627
22.11.2016	336	07:12	16:09	537

a) Berechne die mittlere Taglängenänderung für die Zeitabschnitte 22.1. – 22.3. und 22.3. – 22.6. In welchem Zeitraum ist die mittlere Taglängenänderung größer?

Mittlere Taglängenänderung: 22. 1. – 22. 3. $\overline{T} = \frac{737-542}{60} = 3{,}25$

Mittlere Taglängenänderung: 22. 3. – 22. 6. $\overline{T} = \frac{965-737}{92} = 2{,}48$, im ersten Zeitraum größer!

b) Es sei n die fortlaufende Tagnummer und T(n) die zugehörige Taglänge (in min). Stelle eine allgemeine Formel auf, nach der man die mittlere Taglängenänderung für einen bestimmten Zeitraum $[n_1, n_2]$ berechnen kann!

$$\overline{T}[n_1, n_2] = \frac{T(n_2) - T(n_1)}{n_2 - n_1}$$

c) Ein findiger Mathematiker hat herausgefunden, dass man die Taglänge zwischen 22.12 und 22.6. sehr gut durch die Funktion $T(n) = 0{,}008n^2 + 1{,}1n + 500$ beschreiben kann. Bestimme mit Hilfe dieser Funktion die momentane Taglängenänderung für den Ostersonntag 2016 (dies war der 27. März und hat die Tagnummer 96)!

Es gilt für die momentane Taglängenänderung: $T'(n) = 0{,}016n + 1{,}1$, daher $T'(96) = 2{,}636$.

Am Ostersonntag 2016 betrug die momentane Taglängenänderung ca. 2,64 min je Tag!

d) Berechne die Taglänge für den Ostersonntag 2016 , indem Du für das Zeitintervall 22.12. – 22.6. eine lineare Taglängenänderung annimmst!

Der Zuwachs beträgt je Tag: (965-500) /183 = 2,54.

Daraus erhält man mit T(n) = 2,54 n + 500 für n=96 T(96) = 743,93 Minuten Taglänge.