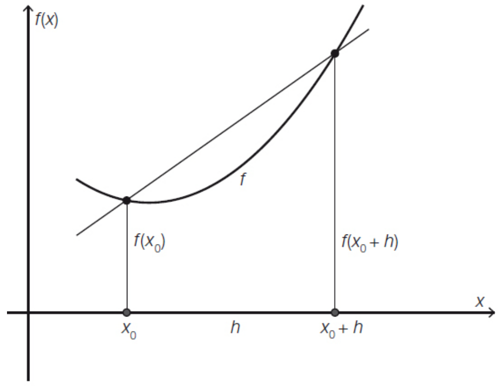
1. Schularbeit 7CR – Lösungen **4. 11. 2015**

Teil 1 – Kernstoff:



1) (2 Punkte) Die nebenstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f mit einer Sekante. Stelle eine Formel für die Steigung der Sekanten auf! Stelle ein Formel für die Steigung der Funktion f(x) an der Stelle x_0 auf!

Die Sekantensteigung beträgt: $k = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Die Steigung der Funktion f(x) an der Stelle x_0 beträgt:

$$k = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

2) (2 Punkte)
Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 + 3x^2$
Bestimme die Gleichung der Tangente an f(x) im Punkt P(1, y)!
Es gilt für $f'(x) = 3x^2 + 6x$ und daher: $f'(1) = 9 = k_t$. Für P gilt: P(1, 4) und daher: t: y=kx + d mit 4 = 9 + d , d. h. d = -5. Tangentengleichung: t: y = 9x – 5.

3) (1 Punkt) Die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ besitzt

□ keine Polstelle ■ genau eine Polstelle □ genau 2 Polstellen □ mehr als 2 Polstellen

4) (1 Punkt) Die mittlere Änderungsrate der Funktion $s(t) = 2t^2 - 4t$ im Intervall [2, 5] beträgt

□ 30 □ -30 ■ 10 □ 0

Begründung: Es gilt: $\dfrac{s(5)-s(2)}{5-2} = \dfrac{30-0}{3} = 10$

5) (1 Punkt) Stelle eine Formel für die mittlere Änderungsrate der Funktion H(u) im Intervall $[u_1, u_2]$ auf!

$$\overline{H_{[u1,u2]}} = \frac{H(u_2)-H(u_1)}{u_2-u_1}$$

6) (2 Punkte)
Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2x^2 + 2x$. f(x) hat

a) □ keine Nullstellen □ genau 1 Nullstelle ■ genau 2 Nullstellen

b) □ genau 1 Monotoniebereich ■ genau 2 Monotoniebereiche □ mehr als 2 Monotoniebereiche

7) (1 Punkt)
Der Luftwiderstand F_L (in N) eines PKWs lässt sich in Abhängigkeit von der Fahrtgeschwindigkeit v (in $^{m}/_{s}$) durch die Funktionsgleichung $F_L(v) = 0{,}4 \cdot v^2$ beschreiben. Berechne die mittlere Zunahme des Luftwiderstands bei einer Erhöhung der Fahrtgeschwindigkeit von 20 $^{m}/_{s}$ auf 30$^{m}/_{s}$!

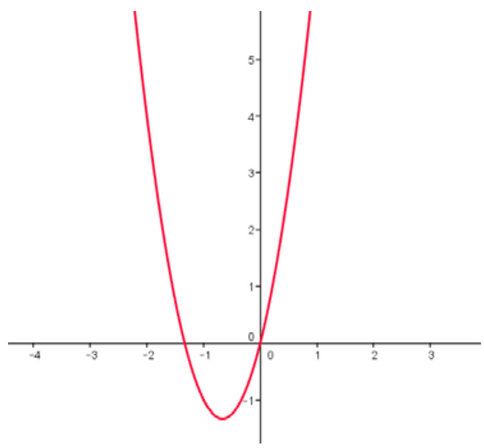
$$\overline{F_{L[20,30]}} = \frac{F_L(30)-F_L(20)}{30-20} = \frac{360-160}{10} = 20N$$

8) (2 Punkte)
Die Funktion $f(x) = 3x^2 + 4x$ hat im Intervall [-2 ; 2]

■ ein lokales Minimum □ ein lokales Maximum

■ ein globales Maximum ■ 2 Nullstellen

Skizziere den Verlauf der Funktion!



Hinweise:

- **Teil 1** prüft „das Wesentliche“ ausgewählter Themenbereiche. Die Aufgaben in Teil 1 werden mit insgesamt 12 Punkten bewertet, jede Teilaufgabe mit 1 Punkt. Um eine positive Beurteilung zu erhalten, sind in jedem Fall zumindest $^2/_3$ der Punkte in diesem Bereich - das sind 8 Punkte - zu erreichen.
- **Teil 2** folgt und wird getrennt von Teil 1 bearbeitet.

1. Schularbeit - 7CR **4. 11. 2015**

2. Teil – Erweiterungsstoff:

Die mit (*) gekennzeichneten Aufgaben 1b und 2b enthalten Kompensationspunkte für die Aufgaben des 1. Teils und können ergänzend zu Teil 1 bearbeitet werden!

1)a) (2 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2x^2 + 1$. Stelle eine Formel für den Differenzenquotienten im Intervall [x; z] auf!

Zeige mit Hilfe der Grenzwertberechnung, dass $f\,'(x) = 4x$ gilt!

b)(*) (1 Punkt) Erkläre anhand einer Skizze, warum für $f(x) = 4x^2 + 2$ und $g(x) = 4x^2 – 2$ gilt: $f\,'(x) = g'(x)$!

c) (1 Punkt) Bestimme die Monotonie der Funktion $f(x) = x^3 – 2x^2$ an der Stelle x= -1!

a) Für den Differenzenquotienten gilt: $\frac{f(z)-f(x)}{z-x} = \frac{2z^2+1-2x^2-1}{z-x} = \frac{2z^2-2x^2}{z-x}$. Für den Differentialquotienten $f\,'(x)$ gilt:

$$f\,`(x) = \lim_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x} = \lim_{z\to x}\frac{2z^2+1-2x^2-1}{z-x} = \lim_{z\to x}\frac{2z^2-2x^2}{z-x} = \lim_{z\to x}\frac{2\cdot(z-x)\cdot(z+x)}{z-x} =$$
$$\lim_{z\to x} 2\cdot(z+x) = 4x$$

b) f(x) und g(x) unterscheiden sich nur durch eine additive Konstante, die keinen Einfluss auf die Steigung der Funktion hat! Daher $f\,'(x) = g'(x)$.

c) $f\,'(x) = 3x^2 – 4x$ und $f\,'(-1) = 7$. Daher ist f(x) bei x = -1 streng monoton steigend!

2) (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 – 2x^2 + x$

a) Bestimme alle Nullstellen der Funktion!

b)(*) Bestimme alle Punkte, an denen f(x) eine waagrechte Tangente hat!

c) In welchen der Punkte mit waagrechter Tangente ändert sich die Monotonie der Funktion?

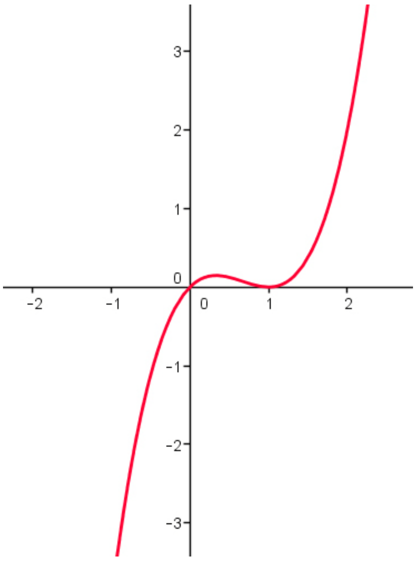
d) Wie kann man das Ergebnis in c) im Zusammenhang mit lokalen Extremwerten interpretieren?

a) Setzt man f(x) gleich Null, erhält man: $x \cdot (x^2 – 2x + 1) = 0$. Daher gilt: $x_1=0$ und $x_2= 1$.

$N_1(0, 0)$ und $N_2(1, 0)$.

b) Es gilt: $f\,'(x) = 3x^2 – 4x + 1 = 0$. Daraus erhält man $x_1= {}^1/_3$ und $x_2= 1$. Das heißt, f(x) besitzt eine waagrechte Tangente bei $P({}^1/_3, {}^4/_{27})$ und Q(1, 0).

c) Setzt man z. B. -1; $^1/_2$ und 2 in f ´(x) ein, erhält man: f ´(-1) = 8, f ´($^1/_2$) = - $^1/_4$ und f ´(2) = 5, erkennt man, dass sich in beiden Punkten mit waagrechter Tangenten die Monotonie ändert! Die folgende Skizze zeigt den Verlauf der Funktion!



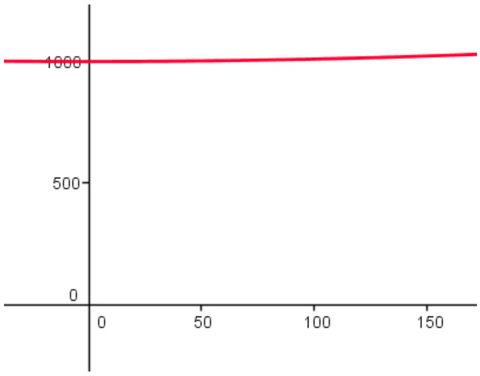
d) Aufgrund der Monotonieänderung in P und Q sind sowohl P als auch Q lokale Extremwerte. Aus der Skizze erkennt man, dass P lokales Maximum, Q lokales Minimum ist.

3) (4 Punkte)

Die Bevölkerungsentwicklung in Utopia kann ab heute (t=0) näherungsweise durch die Funktion B(t) = $0{,}001t^2 + 1000$ beschrieben werden. (t in Jahren, B(t) in 1000 Einwohner)

a) Skizziere den Verlauf der Funktion möglichst genau!

Die folgende Skizze zeigt den Verlauf der Funktion!



b) Berechne die mittlere jährliche Bevölkerungsänderung für die nächsten 50 Jahre!

Für die mittlere jährliche Bevölkerungsänderung gilt: $\overline{B} = \dfrac{B(50) - B(0)}{50} = \dfrac{1002{,}5 - 1000}{50}$ = 0,05, das entspricht 50 Einwohnern.

c) Wie stark ändert sich die Bevölkerung im Jahre 2100 und wieviele Bewohner hat Utopia dann?

Es gilt B´(t) = 0,002 · t und daher B´(85) = 0,17, das entspricht 170 Einwohnern. Im Jahre 2100 hat Utopia B(85) = 1007,225, das entspricht 1007225 Einwohnern!