3. Schularbeit – Lösungen **6CR** **17.3.2015**

Beispiel 1: (1 Punkt)

i) $^{8}\lg 64 = x$ x= **2** ii) $1{,}5^{x} = 2$ x= **1,7095** iii) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x} = 0{,}008$ x= **3**

Beispiel 2: (2 Punkte)

Kreuze in der folgende Tabelle die zutreffende(n) Aussage(n) an und bestimme die Definitionsmenge der vorgegebenen Funktionen!

	$f(x) = 4x^2$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$f(x) = -2x^3$	$f(x) = -\frac{1}{x^2}$
monoton fallend für x<0	■	■	■	■
monoton steigend für x>0	■	□	□	■
Definitionsmenge	D=R	D=R\ {0}	D=R	D=R\ {0}

Beispiel 3: (1 Punkt)

Von einem Medikament weiß man, dass innerhalb von 8 Stunden 40% vom Körper abgebaut und ausgeschieden werden. Die Anfangskonzentration sei C_0. Durch welche der folgenden Formeln lässt sich die Medikamentenkonzentration C(t) nach t Stunden beschreiben?

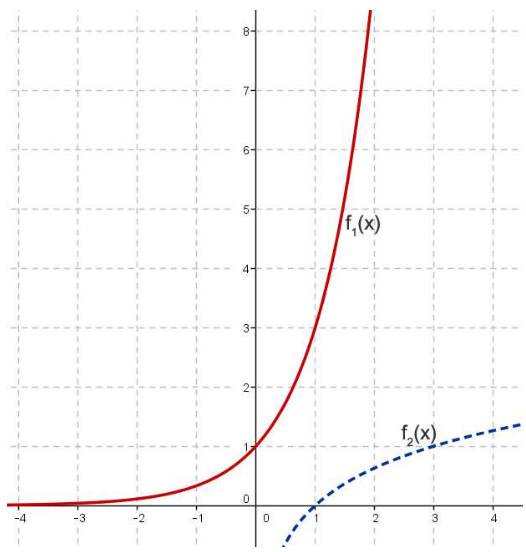
□ $C(t) = C_0 \cdot 0{,}4^t$ □ $C(t) = C_0 - C_0 \cdot 0{,}6$ ■ $C(t) = C_0 \cdot 0{,}6^{\frac{t}{8}}$ □ $C(t) = C_0 \cdot \left(\frac{1}{0{,}4}\right)^{\frac{t}{8}}$

Beispiel 4: (1 Punkt)

Ein radioaktives Präparat zerfällt so, dass die vorhandene Substanz nach einem Tag auf zwei Drittel der ursprünglichen Menge zurückgeht. Zu Beginn der Messung sind 54 mg vorhanden.

Gib das Zerfallsgesetz in der Form $N(t) = N_0 \cdot e^{a \cdot t}$ an!

Es gilt: $e^a = q$ mit $q = {}^2/_3$, daher a = ln q = -0,4055, daher: $N(t) = 54 \cdot e^{-0{,}4055\, t}$



Beispiel 5: (1 Punkt)

Skizziere die Graphen der reellen Funktionen

$f_1(x) = 3^x$ und $f_2(x) = {}^{3}\lg(x)$ in das vorgegebene

Koordinatensystem und beschrifte sie entsprechend mit f_1 und f_2!

Beispiel 6: (1 Punkt)

Für die Bevölkerungsentwicklung in Phantasia ab 2015 wird folgendes Wachstumsgesetz angegeben:

$B(t) = 6{,}2 \cdot 10^7 \cdot 1{,}006^t$ (t in Jahren).

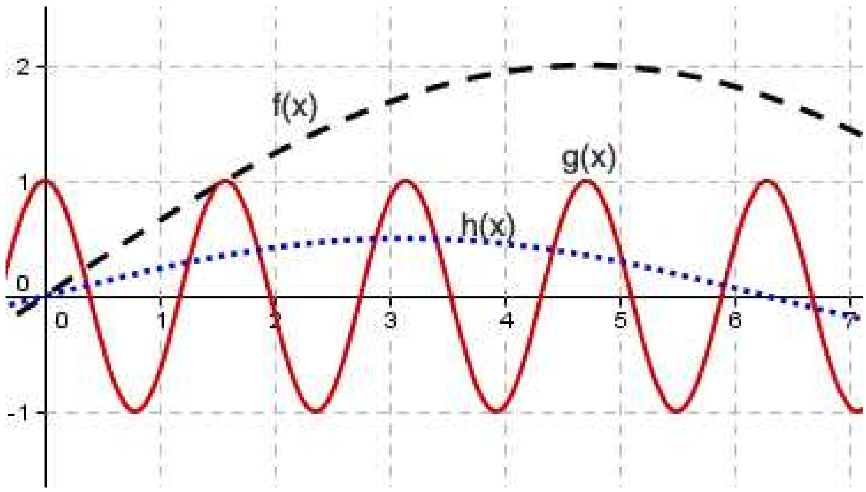
a) Um wie viel % steigt die Bevölkerung pro Jahr? **Um 0,6 %**

b) Auf das Wievielfache steigt die Bevölkerung in 5 Jahren?

B(5) = $6{,}39 \cdot 10^7$ Einwohner, d.h. auf das $1{,}006^5 = 1{,}03$ fache!

Beispiel 7: (1 Punkt)

Ordne den in der Graphik dargestellten Funktionsgraphen die richtigen Funktionsterme zu!



g(x) = cos(4x)

f(x) = 2 · sin ($^x/_3$)

h(x) = $^1/_2$ · sin ($^x/_2$)

Beispiel 8: (1 Punkt)

Bestimme alle lokalen Extremstellen von g(x) im Intervall [0;π]!

$E_1(0, 1)$, $E_2(^{\pi}/_4, -1)$, $E_3(^{\pi}/_2, 1)$, $E_4(^{3\pi}/_4, -1)$, $E_5(\pi, 1)$,
Achtung: Auch bei x=0 bzw. x=π liegen lokale Extremwerte vor, die aber auch globale Extremwerte sind!
(vgl. dazu die Definition für lokale bzw. globale Extremwerte!)

Beispiel 9: (1 Punkt)

Das radioaktive Element Radium 226 hat eine Halbwertszeit von 1602 Jahren. Ermittle die Basis a, wenn das Element nach dem Zerfallsgesetz $N(t) = N_0 \cdot a^t$ zerfällt.

Für die Halbwertszeit gilt: $^1/_2 = a^t$, daher ist $a = \sqrt[t]{\frac{1}{2}} = 0{,}999567$ **für t=1602.**

Beispiel 10: (2 Punkte)

In einem Unternehmen werden für die Erhöhung der Löhne zwei Varianten diskutiert. Nach Variante A sollen alle Beschäftigten jährlich eine Lohnerhöhung 1,3% des Bruttolohnes erhalten. Variante B, die vom Betriebsrat befürwortet wird, enthält eine jährliche Lohnerhöhung von 120.-€ brutto. Beide Varianten werden für einen Zeitraum von 5 Jahren verhandelt.

a) Stelle Formeln $L_A(t)$ und $L_B(t)$ auf, die die jeweiligen Bruttolöhne für einen Basislohn L_0 angeben!

$L_A(t) = L_0 \cdot 1{,}013^t$ **$L_B(t) = L_0 + 120 \cdot t$**

b) Welche Variante ist günstiger, wenn die Bruttolöhne in diesem Unternehmen im Mittel 1650.-€ betragen?

Für L_0 = 1650.-€ gilt: $L_A(1650) = 1650 \cdot 1{,}013^5 = 1760{,}07$€, für $L_B(t) = 1650 + 120 \cdot 5 = 2250$.-€ - Betriebsrat hat gut gerechnet!!

Hinweise:

- **Teil 1** prüft „das Wesentliche“ ausgewählter Themenbereiche. Die Aufgaben in Teil 1 werden mit insgesamt 12 Punkten bewertet, jede Teilaufgabe mit 1 Punkt. Um eine positive Beurteilung zu erhalten, sind in jedem Fall zumindest $^2/_3$ der Punkte in diesem Bereich - das sind 8 Punkte - zu erreichen.
- **Teil 2** folgt und wird getrennt von Teil 1 bearbeitet.

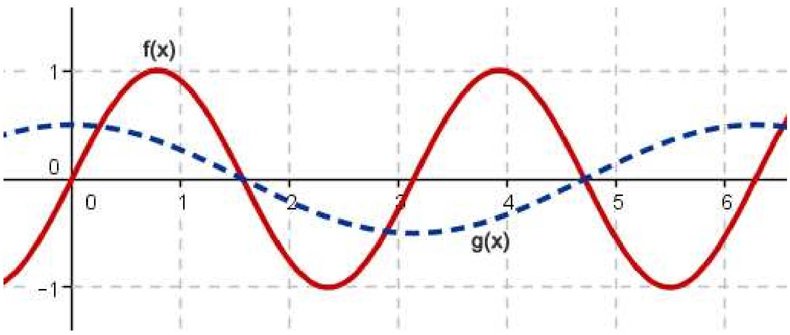
2. Teil – Erweiterungsstoff

Die mit (*) gekennzeichneten Aufgaben 1b und 2a enthalten Kompensationspunkte für die Aufgaben des 1. Teils und können ergänzend zu Teil 1 bearbeitet werden!

Beispiel 1 (4 Punkte) Trigonometrische Funktionen:

Gegeben sin die beiden Funktionen

$f(x) = \sin(2x)$ und $g(x) = {}^1/_2 \cdot \cos(x)$.



a) Skizziere den Verlauf der beiden Funktionen im Intervall $[0; 2\pi]$!

(*)b) Bestimme für beiden Funktionen Amplitude und Frequenz!

f(x): Amplitude: 1, Frequenz: 2

g(x) Amplitude: $^1/_2$, Frequenz: 1

c) Bestimme alle gemeinsamen Nullstellen im Intervall $[0; 2\pi]$!

$N_1(^{\pi}/_2, 0)$, $N_2(^{3\pi}/_2, 0)$

d) Erläutere anhand einer Skizze den Unterschied zwischen den Funktionen $f(x) = \sin(2x)$ und $f_a(x) = a \cdot \sin(2x)$!

Veränderte Amplitude! $f_a(x)$ besitzt um den multiplikativen Faktor a vergrößerte Funktionswerte!

Beispiel 2 (4 Punkte) Exponentielles Wachstum – Modellgleichungen

Die folgende Tabelle zeigt die Bevölkerungsentwicklung Kärntens im Zeitraum 1951 - 2001

1951	**1961**	**1971**	**1981**	**1991**	**2001**
474.764	**495.226**	**526.759**	**536.179**	**547.798**	**559.404**

(*)a) Stelle für den Zeitraum 1951 / 2001 jeweils ein lineares und ein exponentielles Wachstumsmodell auf und die bestimme die entsprechenden Funktionsgleichungen!

Lineares Modell: $B_1(t) = B_0 + k \cdot t$ mit $B_0 = 474764$ und $k=(559404 - 474764) / 50 = 1692{,}8$, daher:

$B_1(t) = 474764 + 1692{,}8 \cdot t$, t=0 für das Jahr 1951!

Exponentielles Modell: $B_2(t) = B_0 \cdot q^t$ mit $B_0 = 474764$ und q= $\sqrt[50]{\frac{559404}{474764}}$ =1,00329., daher:

$B_2(t) = 474764 \cdot 1{,}00329^t$ mit t=0 für das Jahr 1951!

b) Bestimme mit Hilfe der in a) ermittelten Funktionsgleichungen einen Prognosewert für 2015 sowohl für das lineare als auch für das exponentielle Bevölkerungsmodell!

$B_1(t) = 474764 + 1692{,}8 \cdot 64 = 583103$ Einwohner.

$B_2(t) = 474764 \cdot 1{,}00329^{64} = 585832$ Einwohner.

c) Wann würde Kärnten „theoretisch“ 600000 Einwohner haben, wenn man exponentielles Wachstum annimmt?

$B_2(t) = 474764 \cdot 1{,}00329^{t} = 600000$, daraus: t= 71,28 Jahre, daher im Jahre 2023!

d) Berechne für das exponentielle Bevölkerungsmodell „Kärnten“ die Verdopplungszeit!

$1{,}00329^{t} = 2$, daraus: t=211 Jahre!

Beispiel 3 (4 Punkte) Finanzmathematik

a) **Ein durch 10 Jahre zu einem Jahreszinssatz von 2,5% p.a. angelegtes Kapital von 500000.-€ liefert bei ganzjähriger Verzinsung ein Endkapital K_{10}. Um welchen höheren Betrag K kann man mehr verfügen, wenn das Kapital vierteljährlich verzinst wird? Gib die entsprechenden Formeln an!**

Es gilt: $K_{10} = 500000 \cdot 1{,}025^{10} = 640042{,}27$ €.

Bei vierteljährlicher Verzinsung gilt : $q = 1 + 0{,}025 / 4$.

Nach 10 Jahren (40 Verzinsungsperioden) erhält man ein Kapital von $50000 \cdot 1{,}00625^{40} = 641513{,}41$ € und daher um K= 1471,14 € mehr!

b) **„Anleger versus Kreditnehmer“:** Der Kreditbetrag von 500000.-€ wird zehn Jahre lang durch vierteljährliche Raten R jeweils am Quartalsende zurückgezahlt. Wie hoch ist die gesamte Rückzahlungssumme bei einem Jahreszinssatz von 4% p.a. und vierteljährlicher Verzinsung! Erkläre, was dieses Ergebnis für die Bilanz der Bank bedeutet!

Es gilt für die Rate R: $500000 \cdot 1{,}01^{40} - R \cdot \frac{1{,}01^{40} - 1}{0{,}01} = 0$ **, daraus errechnet man R= 15227,8 €.**

Gesamtaufwand daher: 40 · R = 609111,96 €. Bank verdient!

c) Um wieviele Jahre verlängert sich die Kreditrückzahlung, wenn die vierteljährliche Rate nur 10000.-€ beträgt?

Mit R = 10000.-€ erhält man als Kreditlaufzeit 69,66 Vierteljahre, d.h. ca. 17,5 Jahre!

Viel Erfolg!