1. Schularbeit 6CR **4. 11. 2014**

Teil 1 – Kernstoff:

1) (2 Punkte)
a) Zeige, dass das Dreieck A(-4, 0), B(1, 3), C(-2, 8) rechtwinklig ist und berechne die Größe des Winkels γ!
b) Zeige, dass das Dreieck auch gleichschenklig ist!

2) (2 Punkte)
Durch den Schwerpunkt des Dreiecks A(5, 5), B(12, 5), C(4, 8) verläuft eine Gerade g mit der Steigung k= $-{}^{2}/_{3}$.
a) Stelle die Gleichung von g in Parameterform auf!
b) Zeige, dass der Punkt C auf dieser Geraden g liegt!

3) (1 Punkt)
Kreuze die richtigen Lösungen an!

$\sqrt{x^4 y \cdot \sqrt[3]{z}} =$ □ $x^2 \cdot \sqrt[3]{yz}$ □ $x^2 \cdot \sqrt{y} \cdot \sqrt[6]{z}$ □ $x^2 \cdot \sqrt[6]{y^3 z}$ □ $x^2 \cdot \sqrt{yz}$

4) (1 Punkt)
Kreuze die richtige Lösung an!

$\dfrac{(ab)^{-2} \cdot c^{-3}}{(ac)^{-3} \cdot (bc)^{-1}} : \dfrac{c^{-2}}{a^{-2}} =$ □ $\dfrac{ab^3}{c^3}$ □ $\dfrac{ac^3}{b^3}$ □ $\dfrac{ab}{c}$ □ $\dfrac{c^3}{ab}$

5) (1 Punkt)
Stelle als Term mit einer einzigen Wurzel dar!

$$\frac{\sqrt{xy} \cdot \sqrt[3]{xy^2}}{\sqrt{x^3 y^3}} =$$

6) (2 Punkte)
Die beiden Geraden g: y = $\dfrac{3x}{4} - 2$ und h: X=$\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -12 \\ -9 \end{pmatrix}$ sind

□ schneidend □ parallel □ ident

Gib die Gerade h in der Normalvektorform an und bestimme P(x, -5) auf h!

7) (1 Punkt)
Bestimme die Lage der Geraden g und h (ausführliche Begründung)!

g: 4x – 2y = 10 h: X = $\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

8) (2 Punkte)
Bestimme die gegenseitige Lage der Geraden g: X = $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ und h: X = $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

1. Schularbeit - 6CR **4. 11. 2014**

2. Teil – Erweiterungsstoff:

1)a) (2 Punkte) Vereinfache den folgenden Term und schreibe das Ergebnis mit positiven Exponenten!

$$\frac{(xy^{-3})^{-2}\cdot(y^2)^{-1}}{2\cdot(xy)^{-4}\cdot z^{-1}}:\frac{xz^{-2}}{y}=$$

b) (1 Punkt) Potenzen mit rationalen Exponenten der Form $a^{\frac{m}{n}}, m, n \in Z, n \neq 0$ können als Wurzelterm geschrieben werden. Aus einer positiven reellen Zahl u wird zunächst die fünfte Wurzel gezogen und das Ergebnis anschließend quadriert. Macht es einen Unterschied, wenn man die Zahl zuerst quadrieren und dann aus dem Ergebnis die fünfte Wurzel ziehen würde? Begründe mit Hilfe der Rechengesetze für Wurzeln!

c) (1 Punkt) Stelle als Term mit einer einzigen Wurzel dar! $\frac{\sqrt{a\cdot\sqrt{ab}}}{\sqrt[3]{b}}=$

2) (4 Punkte) Von einem Dreieck ABC kennt man A(-6 | 0), B(8 | - 2), C(6 | 4).
a) Formuliere eine schriftliche Anleitung zur Berechnung des Höhenschnittpunkts im Dreieck ABC!
b) Zeige durch ausführliche Rechnung, dass der Höhenschnittpunkt mit dem Eckpunkt C zusammenfällt!

3) (4 Punkte)
Wir betrachten ein Koordinatensystem in R^3. Gegeben sind die Punkte A(-5, -9, 8), B(5, 1, 8), C(9, 12, 10) und D(19, 27, 9). Die Längeneinheit beträgt 1km. Die Geraden g durch A und B sowie h durch C und D beschreiben kurzfristig die Flugbahnen zweier Flugzeuge. Um 8.00 Uhr befand sich das erste Flugzeug im Punkt A und flog in Richtung B, das zweite Flugzeug im Punkt C und flog in Richtung D. Die Punkte B bzw. D werden von beiden Flugzeugen um 8.04 Uhr erreicht.
a) Stelle die Gleichungen der beiden Geraden auf, die die Flugbahnen der Flugzeuge beschreiben! Welches Flugzeug befindet sich im Sinkflug und warum?
b) Berechne die Fluggeschwindigkeit der beiden Flugzeuge in $^{km}/_{h}$!
c) Wie weit sind die beiden Flugzeuge um 8.02 Uhr voneinander entfernt?
d) Wenn das zweite Flugzeug mit konstanter Geschwindigkeit weiterfliegen würde, wann würde es sich in einer Höhe von 4000m befinden?

Lösungen:
1) (2 Punkte)

a) Zeige, dass das Dreieck A(-4, 0), B(1, 3), C(-2, 8) rechtwinklig ist und berechne die Größe des Winkels γ!
b) Zeige, dass das Dreieck auch gleichschenklig ist!

a) Es gilt: $\overrightarrow{AB}$ =(5, 3), $\overrightarrow{AC}$ =(2, 8), $\overrightarrow{BC}$ =(-3, 5). Wegen $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ = 0 liegt bei B ein rechter Winkel vor!
Für γ gilt: $\cos(\gamma) = (3, -5)\cdot(-2, -8) / (\sqrt{34}\cdot\sqrt{68}) = {}^{1}/_{2}\cdot\sqrt{2}$ und daher ist γ=45°.
b) Allein aufgrund der Winkel kann man sehen, dass das Dreieck gleichschenklig ist! Sonst berechnet man die Längen der Seiten a und c. Sie sind gleich lang!

2) (2 Punkte)

Durch den Schwerpunkt des Dreiecks A(5 / 5), B(12 / 5), C(4 / 8) verläuft eine Gerade g mit der Steigung k= $-{}^{2}/_{3}$.
a) Stelle die Gleichung von g in Parameterform auf!
b) Zeige, dass der Punkt C auf dieser Geraden g liegt!

Für den Schwerpunkt berechnet man: S(7, 6). Damit gilt für die Gerade g: X=(7, 6) + t · (3, -2).
Setzt man C(4, 8) in g ein, erhält man: 4=7 + 3t bzw. 8= 6 - 2t und daraus t= -1. C liegt daher auf g!

3) (1 Punkt)

Kreuze die richtigen Lösungen an!

$\sqrt{x^4 y \cdot \sqrt[3]{z}} =$ □ $x^2 \cdot \sqrt[3]{yz}$ ■ $x^2 \cdot \sqrt{y} \cdot \sqrt[6]{z}$ ■ $x^2 \cdot \sqrt[6]{y^3 z}$ □ $x^2 \cdot \sqrt{yz}$

4) (1 Punkt)

Kreuze die richtige Lösung an!

$\frac{(ab)^{-2} \cdot c^{-3}}{(ac)^{-3} \cdot (bc)^{-1}} : \frac{c^{-2}}{a^{-2}} =$ □ $\frac{ab^3}{c^3}$ □ $\frac{ac^3}{b^3}$ □ $\frac{ab}{c}$ ■ $\frac{c^3}{ab}$

$$\frac{(ab)^{-2} \cdot c^{-3}}{(ac)^{-3} \cdot (bc)^{-1}} : \frac{c^{-2}}{a^{-2}} = \frac{a^{-2}b^{-2}c^{-3}}{a^{-3}c^{-3}b^{-1}c^{-1}} \cdot \frac{c^2}{a^2} = ab^{-1}c \cdot \frac{c^2}{a^2} = \frac{c^3}{ab}.$$

5) (1 Punkt)

Stelle als Term mit einer einzigen Wurzel dar!

$$\frac{\sqrt{xy} \cdot \sqrt[3]{xy^2}}{\sqrt{x^3 y^3}} = \frac{\sqrt{xy} \cdot \sqrt[3]{xy^2}}{xy \cdot \sqrt{xy}} = \frac{\sqrt[3]{xy^2}}{xy} = \sqrt[3]{\frac{xy^2}{x^3 y^3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{x^2 y}}$$

6) (1 Punkt)

Die beiden Geraden g: y = $\frac{3x}{4} - 2$ und h: X= $\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -12 \\ -9 \end{pmatrix}$ sind

□ schneidend □ parallel ■ ident

Gib die Gerade h in der Normalvektorform an und bestimme P(x, -5) auf h!

Schreibt man g in Parameterform an, erhält man : X=(0, -2) + t · (4, 3). Da die beiden Richtungsvektoren entgegengesetzt orientiert sind, können g und h nur parallel oder ident sein. Da Q(0, -2) auch auf h liegt, sind sie ident. Für P(x, -5) erhält man: x=8-12s bzw. -5=4-9s. Aus der zweiten Gleichung berechnet man s=1 und daher gilt: x=-4, daher: P(-4, -5).

7) (1 Punkt)

Bestimme die Lage der Geraden g und h (ausführliche Begründung)!

g: 4x – 2y = 10 h: X = $\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schreibt man h in Normalvektorform an, erhält man: x + 2y = 5. g und h sind daher sicher nicht parallel, sondern haben einen Schnittpunkt. Er liegt bei: S(3, 1).

8) (2 Punkte)

Bestimme die gegenseitige Lage der Geraden g: X = $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ und h: X = $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Die beiden Richtungsvektoren sind kein Vielfaches voneinander, daher können die beiden Geraden nur schneidend oder windschief sein.

Es gilt:

1 + 8t = -1 + 4s

-2 – 4t = -1 + 2s

3 + 8t = 1 – 4s

Daraus erhält man z.B. aus 1. und 3. Gleichung durch Addition 4 + 16t = 0. D.h. t= $-\frac{1}{4}$ und s=0. Einsetzten in die 2. Gleichung ergibt: -2 + 1 = -1. s und t sind daher eindeutig, die beiden Geraden haben einen Schnittpunkt in S(-1, -1, 1).

2. Teil – Erweiterungsstoff:

1)a) (2 Punkte) Vereinfache den folgenden Term und schreibe das Ergebnis mit positiven Exponenten!

$$\frac{(xy^{-3})^{-2} \cdot (y^2)^{-1}}{2 \cdot (xy)^{-4} \cdot z^{-1}} : \frac{xz^{-2}}{y} = \frac{x^{-2}y^6y^{-2}}{2x^{-4}y^{-4}z^{-1}} \cdot \frac{y}{xz^{-2}} = \frac{xy^9z^3}{2}$$

b) (1 Punkt) Potenzen mit rationalen Exponenten der Form $a^{\frac{m}{n}}, m, n \in Z, n \neq 0$ können als Wurzelterm geschrieben werden. Aus einer positiven reellen Zahl u wird zunächst die fünfte Wurzel gezogen und das Ergebnis anschließend quadriert. Macht es einen Unterschied, wenn man die Zahl zuerst quadrieren und dann aus dem Ergebnis die fünfte Wurzel ziehen würde? Begründe mit Hilfe der Rechengesetze für Wurzeln!

Es gilt: $\left(\sqrt[5]{u}\right)^2 = \left(u^{\frac{1}{5}}\right)^2 = u^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{u^2}$, daher ist es egal, in welcher Reihenfolge man die Operationen durchführt!

2) (4 Punkte) Von einem Dreieck ABC kennt man A(-6|0), B(8|- 2), C(6|4).
a) Formuliere eine schriftliche Anleitung zur Berechnung des Höhenschnittpunkts im Dreieck ABC!
b) Zeige durch ausführliche Rechnung, dass der Höhenschnittpunkt mit dem Eckpunkt C zusammenfällt!

a) Führe für zwei Seiten folgenden Vorgang durch: Lege eine Normale auf die Seite durch den gegenüberliegenden Eckpunkt (in Parameterform oder Normalvektorform) und schneide diese beiden Geraden.
b) Es gilt: $\overrightarrow{AB}$ =(14, -2) und $\overrightarrow{BC}$ =(-2, 6). Beide Vektoren sind für die entsprechenden Höhen h_c bzw. h_a bereits Normalvektoren. Daher erhält man für die beiden Höhen h_c bzw. h_a:
h_c: 14x – 2y = 76 oder 7x – y = 38 und h_a: -2x + 6y = 12 oder –x + 3y = 6.
Schneidet man diese beiden Geraden, erhält man als Schnittpunkt H(6, 4) und damit die Koordinaten von C!

3) (4 Punkte)
Wir betrachten ein Koordinatensystem in R^3. Gegeben sind die Punkte A(-5, -9, 8), B(5, 1, 8), C(9, 12, 10) und D(19, 27, 9). Die Längeneinheit beträgt 1km. Die Geraden g durch A und B sowie h durch C und D beschreiben kurzfristig die Flugbahnen zweier Flugzeuge. Um 8.00 Uhr befand sich das erste Flugzeug im Punkt A und flog in Richtung B, das zweite Flugzeug im Punkt C und flog in Richtung D. Die Punkte B bzw. D werden von beiden Flugzeugen um 8.04 Uhr erreicht.
a) Stelle die Gleichungen der beiden Geraden auf, die die Flugbahnen der Flugzeuge beschreiben! Welches Flugzeug befindet sich im Sinkflug und warum?
b) Berechne die Fluggeschwindigkeit der beiden Flugzeuge in $^{km}/_{h}$!
c) Wie weit sind die beiden Flugzeuge um 8.02 Uhr voneinander entfernt?
d) Wenn das zweite Flugzeug mit konstanter Geschwindigkeit weiterfliegen würde, wann würde es sich in einer Höhe von 4000m befinden?

a) g[A, B]: X=(-5, -9, 8) + s · (10, 10, 0) und h[C, D]: X=(9, 12, 10) + t · (10, 15, -1) sind die beiden Geradengleichungen. Das zweite Flugzeug befindet sich im Sinkflug, denn die z-Koordinate des Richtungsvektors ist negativ!
b) Für die Fluggeschwindigkeit berechnet man die Längen der Vektoren AB bzw. CD. Man erhält:
|AB|= $\sqrt{200} = 10 \cdot \sqrt{2}$ =14,14km und |CD|= $\sqrt{326}$ =18,06km. Da die Flugdauer für diese Strecke jeweils 4 Minuten beträgt, liegen die Geschwindigkeiten bei 212,1 $^{km}/_{h}$ bzw. 270,83 $^{km}/_{h}$.
c) Um 8.02 befindet sich das erste Flugzeug an Position P_1= =(-5, -9, 8) + $^1/_2$ · (10, 10, 0) = (0, -4, 8), das zweite Flugzeug an Position P_2= =(9, 12, 10) + $^1/_2$ · (10, 15, -1) = (14, $^{39}/_2$, $^{19}/_2$). Ihre Entfernung beträgt $|P_1P_2|$=|(14, $^{47}/_2$, $^{35}/_2$) = 32,47km.
d) Es gilt Q(x, y, 4) = (9, 12, 10) + t · (10, 15, -1) und daher: 4=10-t, daher t=6, also um 8.24 Uhr!