2. Schularbeit

8CR 15. 3. 2011

1) Die Funktion $f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ und die x-Achse begrenzen im Intervall [1; 5] ein Flächenstück, dessen Inhalt man näherungsweise durch Bilden von Ober- und Untersummen berechnen kann.
a) Erkläre die Methode der Flächenberechnung mittels Ober- und Untersummen ausführlich anhand einer Skizze und erläutere Vor- und Nachteile dieses Verfahrens!
b) Zeige, dass $O_1 = 8$ und $U_1=5{,}788$ gilt! Zerlege das Intervall in 4 gleich große Abschnitte und berechne damit O_4 und U_4! Schätze damit den exakten Flächeninhalt und gib einen entsprechenden Schätzwert an!
c) Bestimme mit Hilfe der Stammfunktion von f(x) die exakte Fläche im Intervall [1; 5]! Wie groß ist der Fehler bei O_4 bzw. U_4?

2) Die Gleichung k_a: $x^2 + y^2 – 4ax = 0$ beschreibt allgemeine Kreislinien.
a) Bestimme allgemein Mittelpunkt und Radius dieser Kreise und beschreibe ihre allgemeine Lage!
b) Welcher der Kreise k_a geht durch P(3, $\sqrt{3}$)? Bestimme seine Gleichung!
c) Durch P verläuft auch eine Ellipse, die k_a in P berührt. Bestimme die Gleichung dieser Ellipse und skizziere den Verlauf der beiden Kurven!

3) Die Funktion $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ hat in P(4, y) die Gerade t: $9x + y = 16$ als Tangente.
a) Bestimme die Gleichung der Funktion sowie Lage **und** Art aller Extremwerte!
b) Bestimme die Gleichung der Tangente t_W im Wendepunkt der Funktion!
c) f(x) begrenzt mit der Wendetangente t_W und der positiven y-Achse ein Flächenstück. Berechne den Inhalt dieser Fläche!

4) Schokoladetafeln werden in Kartons zu je fünf Stück weiterverpackt, wobei erfahrungsgemäß 1% der Tafeln zu Bruch gehen.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält ein Karton mehr zerbrochene als ganze Tafeln?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Karton lauter ganze Tafeln enthält?
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von zehn Kartons mindestens acht keine zerbrochenen Tafeln enthalten?
d)In den 50 Kartons der letzten Produktionsserie fand man insgesamt 4 zerbrochene Tafeln. Wie wahrscheinlich ist ein solches oder noch schlechteres Ergebnis?

[1) a)2P. b)3P. c) 3P. 2) a) 2P. b)3 P. c) 3P. 3) a) 4P. b) 1P. c) 3P. 4) a) 2P. b)2P. c)2P. d)2P.]

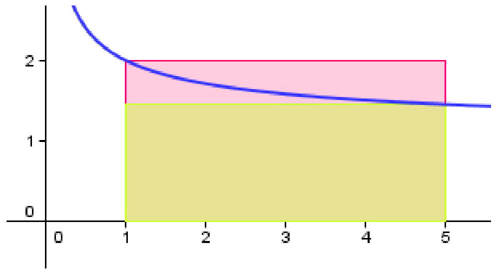
Lösungen:

1) Es gilt: $U_1 = 4\cdot f(5) = 5{,}788$ und $O_1 = 4 \cdot f(1) = 8$

Zerlegt man das Intervall [1; 5] in vier gleich große Abschnitte, erhält man für $U_4 = f(2) + f(3) + f(4) + f(5) = 6{,}23$ und für $O_4 = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 6{,}784$.

Als Schätzwert für den exakten Flächeninhalt kann man den Mittelwert von U_4 und O_4 annehmen. Man erhält: $A\approx 6{,}508$ Flächeneinheiten.

Die exakte Fläche mit Hilfe von Stammfunktionen berechnet man folgend:



$$A = \int_1^5 1+\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^5 1+x^{-\frac{1}{2}}dx = x+2\cdot x^{\frac{1}{2}}\Big|_1^5 5+2\cdot\sqrt{5}-1-2 = 2+2\cdot\sqrt{5} \approx 6{,}4721FE$$

2) Die Gleichung k_a: $x^2 + y^2 - 4ax = 0$ beschreibt allgemeine Kreislinien.

a) Bestimme allgemein Mittelpunkt und Radius dieser Kreise und beschreibe ihre allgemeine Lage!

Es gilt: $(x - 4ax + 4a^2) + y^2 = 4a^2$ und daher: $(x-2a)^2 + y^2 = 4a^2$. Daraus kann man M(2a, 0) und r=2a ablesen. Die Gleichung beschreibt allgemeine Kreislinien, deren Mittelpunkt auf der x-Achse liegt und deren Radius gleich der x-Koordinate des Mittelpunkts ist. Daher gehen alle diese Kreise durch den Koordinatenursprung.

b) Welcher der Kreise k_a geht durch P(3, $\sqrt{3}$)? Bestimme seine Gleichung!

Setzt man P in k_a ein, erhält man:

$(3 - 2a)^2 + 3 = 4a^2$ und daraus: $9 - 12a + 3 = 0$. Es gilt daher: a=1 und daher M(2, 0) und r=2. Die Gleichung dieses Kreises lautet daher: $(x-2)^2 + y^2 = 4$.

c) Durch P verläuft auch eine Ellipse, die k_a in P berührt. Bestimme die Gleichung dieser Ellipse und skizziere den Verlauf der beiden Kurven!

Es gilt: $9b^2 + 3a^2 = a^2b^2$. Für die Tangente t an den Kreis in P gilt: $(x - 2)\cdot 1 + \sqrt{3}\ y = 4$ oder $x + \sqrt{3}\,y = 6$.

Daraus liest man $k = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ und $d = \frac{6}{\sqrt{3}}$.

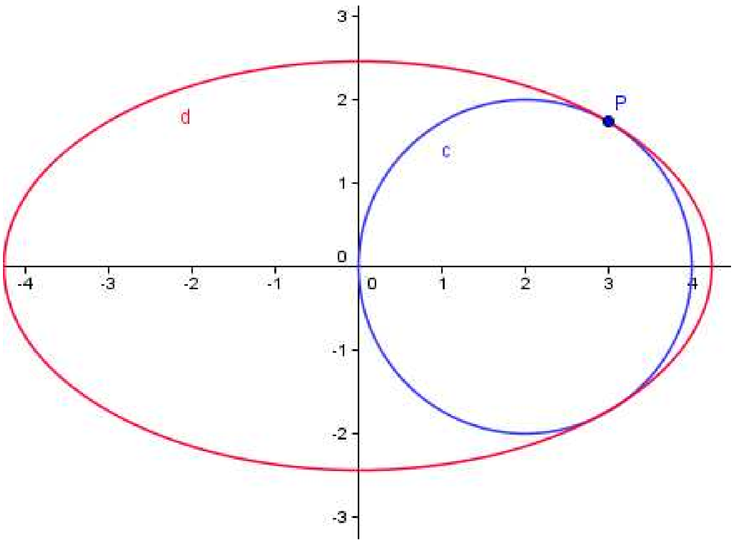
Setzt man in die Berührbedingung der Ellipse ein, erhält man: $\frac{1}{3}a^2 + b^2 = 12$.

Setzt man dies in die obige Gleichung ein, erhält man: $9\cdot\left(12-\frac{1}{3}a^2\right)+3a^2 = a^2\cdot\left(12-\frac{1}{3}a^2\right)$.

$108-3a^2+3a^2 = 12a^2-\frac{1}{3}a^4$. Daraus erhält man: $a^2=18$ und $b^2=6$. Die Gleichung der Ellipse lautet daher:

$6x^2 + 18y^2 = 108$ oder: $x^2 + 3y^2 = 18$.

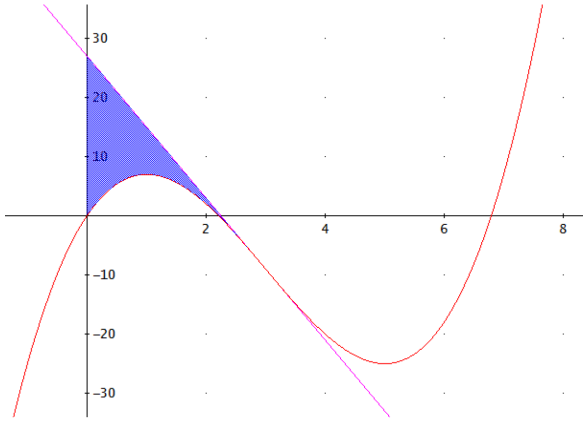
Die folgende Skizze zeigt die Lage der beiden Kurven:



3) Die Funktion $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ hat in $P(4, y)$ die Gerade t: $9x + y = 16$ als Tangente.
a) Bestimme die Gleichung der Funktion sowie Lage **und** Art aller Extremwerte!
Für P gilt: $P(4, -20)$. Daher gilt:
$64 + 16a + 4b = -20$.
$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ und $f'(4) = -9$, daher.
$48 + 8a + b=-9$.
Man erhält: a= -9 und b=15. Die Gleichung der Funktion lautet daher:
$f(x) = x^3 – 9x^2 + 15x$.
$f'(x) = 3x^2 – 18x + 15 =0$ und daher bei $E_1(5, -25)$ und $E_2(1, 7)$.
Wegen $f'''(x) = 6x – 18$ und $f''(5) = 12>0$ und $f''(1) = -12<0$ ist E_1 lokales Minimum und E_2 lokales Maximum.

b) Bestimme die Gleichung der Tangente t_W im Wendepunkt der Funktion!
Wegen $f'''(x) = 6x – 18 = 0$ und x=3 hat f(x) in W(3, -9) einen Wendepunkt. $f'(3) = -12 =k_t$. Es gilt:
-9 = -36 + d und daher: d=27. Die Gleichung der Wendetangente lautet daher: t_w: y = -12x + 27.

c) f(x) begrenzt mit der Wendetangente t_W und der positiven y-Achse ein Flächenstück. Berechne den Inhalt dieser Fläche!
Die Graphik zeigt die Lage des gesuchten Flächenstücks:



Die gesuchte Fläche besteht aus der Fläche des rechtwinkligen Dreiecks vermindert um die Fläche zwischen f(x) und der x-Achse im Intervall [0; 2,20] und der Fläche zwischen f(x) und der x-Achse im Intervall [2,20; 3] vermindert um die Fläche des rechtwinkligen Dreiecks unterhalb der x-Achse.
Insgesamt erhält man durch Addition der Einzelflächen (da f(x) und die Tangente einen eindeutigen gemeinsamen Punkt haben:

$$A = \int_0^3 27 - 12x - \left(x^3 - 9x^2 + 15x\right)dx = 20{,}25FE$$

4) Schokoladetafeln werden in Kartons zu je fünf Stück weiterverpackt, wobei erfahrungsgemäß 1% der Tafeln zu Bruch gehen.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält ein Karton mehr zerbrochene als ganze Tafeln?
P(mehr zerbrochene als ganze Tafeln) = P(mehr als 2 zerbrochene Tafeln) =
P(3) + P(4) + P(5) = 0,000009801 + 0,0000000495 + 0,0000000001 = 0,0000098506.
b)Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Karton lauter ganze Tafeln enthält?
P(alle Tafeln ganz) = $0{,}99^5$ = 0,9510.
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von zehn Kartons mindestens acht keine zerbrochenen Tafeln enthalten?
P(Karton ok) = 0,9510. Daher P(Karton nicht ok) = 1 – 0,9510 = 0,049.
P(mindestens 8 ok) = P(8 ok) + P(9 ok) + P(alle ok) = 0,0722 + 0,3118 + 0,6051 = 0,9891.
d)In den 50 Kartons der letzten Produktionsserie fand man insgesamt 4 zerbrochene Tafeln. Wie wahrscheinlich ist ein solches oder noch schlechteres Ergebnis?
Bei n=50 Kartons (=250 Tafeln) würde man im Mittel $E(x) = 250 \cdot 0{,}01 = 2{,}5$ zerbrochene Tafeln finden. Die Wahrscheinlichkeit für ein solches oder noch schlechteres Ergebnis beträgt:
$P(X \geq 4) = 1 – [P(0) + P(1) + P(2) + P(3)]$ =
1 – [0,081 + 0,2047 + 0,2574 + 0,2149] = 1 – 0,7581 = 0,2418.