

### 3. Schularbeit

7C

2. 6. 2010

- 1) Von einem Kreis kennt man  $M(3, -5)$  und die Kreistangente  $t: 4x + 3y = 47$ .
- a) Bestimme die Kreisgleichung!
  - b) Zeige, dass der Kreis  $k: (x-3)^2 + (y+5)^2 = 100$  die Parabel  $par: y^2 = x$  schneidet und berechne den Schnittpunkt  $P$ ! Bestimme auch den Schnittwinkel von Parabel und Kreis!
- 2) a) Bestimme die Gleichung einer Hyperbel, die durch  $Q(3, 3)$  geht und den Brennpunkt  $F(2 \cdot \sqrt{6}, 0)$  hat!
- b) Bestimme die Gleichungen der beiden Asymptoten!
- 3) Die Funktion  $f(x) = x^2 + 3x$  wird in  $P(-1, y)$  von einer Funktion  $g(x) = ax^3 + bx^2$  berührt.
- a) Bestimme die Funktionsgleichung von  $g(x)$ !
  - b) Bestimme Extremwerte und allfällige Wendepunkte der beiden Funktionen und skizziere den Verlauf beider Kurven!
- 4) Die Ellipse  $ell: x^2 + 4y^2 = 48$  wird im Punkt  $S(4, y > 0)$  von einer Parabel in 1. Hauptlage geschnitten.
- a) Wie lautet die Gleichung dieser Parabel?
  - b) Unter welchem Winkel schneiden einander die Kurven in  $S$ ?

[1) a) 3P. b) 5P. 2) a) 3P. b) 1P. 3) a) 4P. b) 4P. 4) a) 1P. b) 3P.]

Lösungen:

Beispiel 1:

Kreisgleichung:  $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 100$

Schneidet man den Kreis mit der Parabel, erhält man:

$(y^2 - 3)^2 + (y+5)^2 = 100$  oder:

$$y^4 - 6y^2 + 9 + y^2 + 10y + 25 = 100$$

Die Gleichung  $y^4 - 5y^2 + 10y - 66 = 0$  lässt sich zerlegen in:

$(y-3) \cdot (y^3 + 3y^2 + 4y + 22) = 0$ . Daraus erhält man  $y=3$  und  $x=9$ . Der Schnittpunkt P liegt daher bei P(9, 3).

Anmerkung: Einfachere Überlegung:

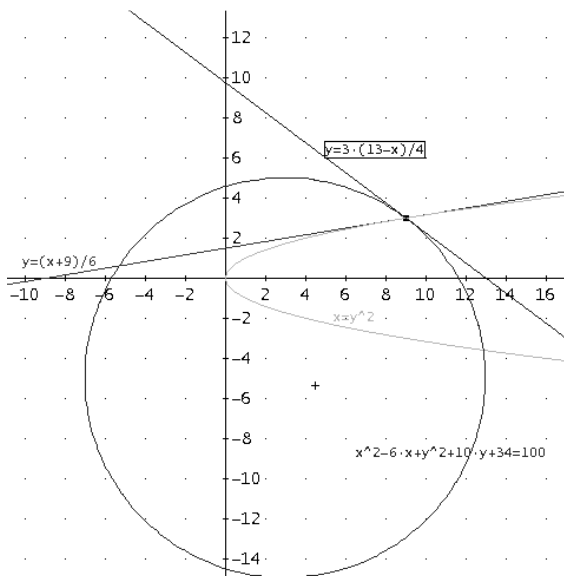
Da die beiden Terme  $(y^2 - 3)^2$  und  $(y+5)^2$  beide Quadratzahlen liefern müssen, die in Summe 100 ergeben, kommen als Quadratzahlen nur 64 und 36 in Frage, d.h. es muss  $y+5=8$  gelten und damit  $y=3$ .

Man überprüft leicht, dass P(9, 3) auf dem Kreis und auf der Parabel liegt. Die Gleichungen der Tangenten lauten:

$t_k: (x-3) \cdot 6 + (y+5) \cdot 8 = 100$  bzw.  $6x - 18 + 8y + 40 = 100$  bzw.  $3x + 4y = 39$

$t_{par}: 3y = \frac{1}{2}(x+9)$  bzw.  $-\frac{1}{2}x + 3y = \frac{9}{2}$  oder  $-x + 6y = 9$ .

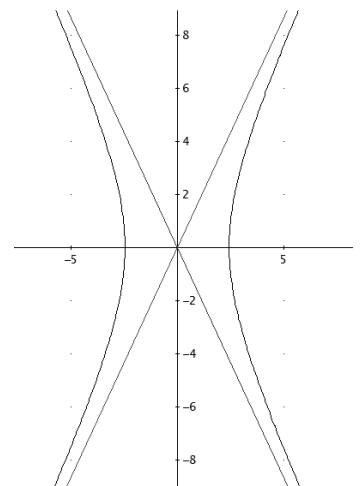
Schnittwinkel:  $\alpha = 46,33^\circ$ .



2) Für die Hyperbel gilt:

$a^2 + b^2 = 24$  und  $9b^2 - 9a^2 = a^2b^2$ . Daraus berechnet man  $a^2=6$  und  $b^2 = 18$ . Die Gleichung der Hyperbel lautet:  $hyp: 3x^2 - y^2 = 18$ . Für die Gleichungen der beiden Asymptoten erhält man:

$a_1: y = \sqrt{3} \cdot x$  und  $a_2: y = -\sqrt{3} \cdot x$ . Die nebenstehende Skizze zeigt den Verlauf von Hyperbel und Asymptoten:



3) Die Funktion  $f(x) = x^2 + 3x$  wird in  $P(-1, y)$  von einer Funktion  $g(x) = ax^3 + bx^2$  berührt.

a) Bestimme die Funktionsgleichung von  $g(x)$ !

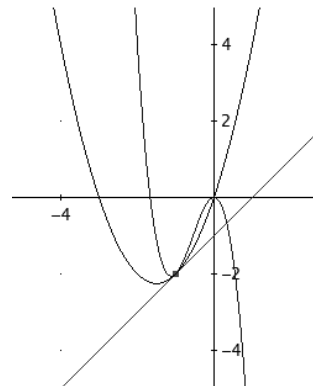
Für  $P$  berechnet man  $P(-1, -2)$ . Wegen  $f'(x) = 2x + 3$  und  $f'(-1) = 1$  ist  $t: y = x - 1$  die Tangente in  $P$ . Daher gilt:  $g'(-1) = 1$  und  $g(-1) = -2$ . Das heißt:  $-a + b = -2$  und  $3a - 2b = 1$ . Daraus berechnet man:  $a = -3$  und  $b = -5$ . Die Gleichung von  $g(x)$  lautet daher:  $g(x) = -3x^3 - 5x^2$ .

b) Bestimme Extremwerte und allfällige Wendepunkte der beiden Funktionen und skizziere den Verlauf beider Kurven!

Aus  $f'(x) = 2x + 3 = 0$  berechnet man das Minimum  $E_1(-3/2, -9/4)$ ,  $f(x)$  hat keine Wendepunkte.

Aus  $g'(x) = -9x^2 - 10x = 0$  erhält man für  $g(x)$  das Maximum  $(0, 0)$  sowie das Minimum  $(-10/9, -500/243)$  und aus  $g''(x) = -18x - 10 = 0$  den Wendepunkt  $W(-5/9, -250/243)$ .

Die nebenstehende Skizze veranschaulicht den Verlauf der beiden Kurven!



4) Die Ellipse  $ell: x^2 + 4y^2 = 48$  wird im Punkt  $S(4, y > 0)$  von einer Parabel in 1. Hauptlage geschnitten.

a) Wie lautet die Gleichung dieser Parabel?

Für  $S$  erhält man  $S(4, 2 \cdot \sqrt{2})$ . Eine Parabel in erster Hauptlage durch  $S$  lautet daher:  $y^2 = 2x$ .

b) Unter welchem Winkel schneiden einander die Kurven in  $S$ ?

Für die Ellipsentangente in  $S$  erhält man wegen  $a^2 = 48$  und  $b^2 = 12$ :

$t_{ell}: 48x + 96\sqrt{2}y = 576$  oder  $t_{ell}: x + 2\sqrt{2}y = 12$ , für die Parabeltangente:  $t_{par}: 2\sqrt{2}y = x + 4$  oder  $t_{par}:$

$-x + 2\sqrt{2}y = 4$ . Für den Schnittwinkel erhält man  $\alpha = 38,94^\circ$ . Die folgende Skizze zeigt die Lage der beiden Kurven sowie der Tangenten.

