

Wiederholung der 1. Schularbeit

7C

2.12.2009

1) Bei einer Vollbremsung eines Kleinwagens verringert sich dessen Geschwindigkeit $v(t)$ (in m/s) in etwa nach der Formel $v(t) = 28 - 5,5t$.

- Zeige und erkläre, dass für den zurückgelegten Weg $s(t)$ (in m) gilt: $s(t) = 28t - 2,75t^2$!
- Bestimme mit Hilfe der Wegformel die durchschnittliche Geschwindigkeit im Zeitintervall $[0,2]$! Stelle dabei ausführlich die verwendeten Zusammenhänge dar und erkläre den Begriff „Durchschnittsgeschwindigkeit“!
- Wie groß sind Bremszeit und Bremsweg in der obigen Formel? Kann das Fahrzeug bei dieser Geschwindigkeit noch vor einem Hindernis, das sich in 80m Entfernung befindet, anhalten?
- (Zusatz) Ein Fahrzeug dieses Typs soll innerhalb von 50m anhalten können. Mit welcher Geschwindigkeit darf es höchstens fahren?

2) Überprüfe die Richtigkeit der folgenden Behauptungen und begründe die ausführlich!

- $f(x) = 2x^2 + 1$ besitzt genau einen Extremwert!
- Gilt für eine Funktion $h(x)$, dass $h''(x_1) < 0$ ist, so liegt bei x_1 stets ein Maximum vor!
- Eine Polynomfunktion dritten Grades kann höchstens 2 Wendepunkte haben.
- Ein Schüler behauptet: Weil $f'(x) = x^2 - 9 = 0$ ist und $f''(-3) < 0$ ist, hat $f(x)$ bei $x=3$ ein Maximum!

3) a) Zeige, dass $f(x) = 2x^3 + 4x - 1$ und $g(x) = -5x^2 - 2$ einander im Punkt $P(-1, -7)$ berühren! (Tipp: $f(x)$ und $g(x)$ haben in P eine gemeinsame Tangente!)

b) Bestimme die Gleichung der gemeinsamen Tangente an $f(x)$ und $g(x)$ im Punkt P und zeichne beide Funktionen sowie die gemeinsame Tangente!

c) In welchen Punkten verlaufen die Tangenten an $f(x)$ parallel zur Geraden $g: y = 10x + 1$? Bestimme ihre Gleichungen!

4) a) Bestimme für die Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x$ Lage und Art aller Extremwerte!

b) Besitzt $f(x)$ auch einen Wendepunkt? Falls ja, berechne ihn!

c) Skizziere den Verlauf der Kurve möglichst genau!

[1)a)1P. b)2P c)2P. d)1P. 2)a) - d) 1P. 3)a)2P. b)2P. c) 2P. 4)a)3P. b)1P. c)2P.]

Lösungen:

1) Bei einer Vollbremsung eines Kleinwagens verringert sich dessen Geschwindigkeit $v(t)$ (in $\frac{m}{s}$) in etwa nach der Formel $v(t) = 28 - 5,5t$.

a) Zeige und erkläre, dass für den zurückgelegten Weg $s(t)$ (in m) gilt: $s(t) = 28t - 2,75t^2$!

Da die erste Ableitung von $s(t)$ als „momentane Wegänderung“ oder aber als Momentangeschwindigkeit interpretiert werden kann, gilt: $s'(t) = 28 - 5,5t$!

b) Bestimme mit Hilfe der Wegformel die durchschnittliche Geschwindigkeit im Zeitintervall $[1; 2]$! Stelle dabei ausführlich die verwendeten Zusammenhänge dar und erkläre den Begriff „Durchschnittsgeschwindigkeit“!

Für die durchschnittliche Geschwindigkeit im Zeitintervall $[t_1, t_2]$ gilt:

$$\bar{v} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}. \text{ Daher gilt für das Zeitintervall } [1; 2]: \bar{v} = \frac{s(2) - s(1)}{2 - 1} = \frac{45 - 25,25}{1} = 19,75 \frac{m}{s}.$$

c) Wie groß sind Bremszeit und Bremsweg in der obigen Formel? Kann das Fahrzeug bei dieser Geschwindigkeit noch vor einem Hindernis, das sich in 80m Entfernung befindet, anhalten?

Die Zeit, die zum Bremsen benötigt wird, bestimmt man aus $v(t) = 0$. Man erhält: $t \approx 5,1s$. Der Bremsweg (ohne „Schrecksekunde“) beträgt daher $s(5,1) = 71,27m$. Das Fahrzeug kann daher bei dieser Geschwindigkeit unter günstigen Bedingungen noch vor einem Hindernis, das sich in 80m Entfernung befindet, anhalten!

d) (Zusatz) Ein Fahrzeug dieses Typs soll innerhalb von 50m anhalten können. Mit welcher Geschwindigkeit darf es höchstens fahren?

Wenn das Fahrzeug innerhalb von 50m anhalten können soll, darf der Bremsweg für die Bremszeit t höchstens 50m betragen, d.h.: $s(t) = v \cdot t - 2,75t^2 = 50$. Für die Bremszeit t gilt aber: $t = \frac{v}{5,5}$. Daher ist:

$$s(t) = v \cdot \frac{v}{5,5} - 2,75 \cdot \left(\frac{v}{5,5}\right)^2 = \frac{v^2}{5,5} - 2,75 \cdot \frac{v^2}{30,25} = 50. \text{ Man erhält: } \frac{v^2}{11} = 50 \text{ und für } v \approx 23,45 \frac{m}{s} \text{ oder ca. } 84,43 \frac{km}{h}.$$

2) Überprüfe die Richtigkeit der folgenden Behauptungen und begründe die ausführlich!

a) $f(x) = 2x^2 + 1$ besitzt genau einen Extremwert!

Es gilt: $f'(x) = 4x = 0$ für $x=0$ und $f''(x) = 4 > 0$, daher hat $f(x)$ genau einen Extremwert, und zwar ein Minimum bei $E(0, 1)$.

b) Gilt für eine Funktion $h(x)$, dass $h''(x_1) < 0$ ist, so liegt bei x_1 stets ein Maximum vor!

Nein, denn $h''(x_1) < 0$ weist lediglich darauf hin, dass $h(x)$ in x_1 rechtsgekrümmt ist. Die ist zwar Bedingung für das Vorliegen eines Maximums, die Voraussetzung dafür ist jedoch, dass $h'(x_1) = 0$ gilt.

c) Eine Polynomfunktion dritten Grades kann höchstens 2 Wendepunkte haben.

Falsch, eine Polynomfunktion dritten Grades kann höchstens einen Wendepunkt haben, da die zweite Ableitung eine lineare Funktion mit genau einer Nullstelle ist!

d) Ein Schüler behauptet: Weil $f'(x) = x^2 - 9 = 0$ ist und $f''(-3) < 0$ ist, hat $f(x)$ bei $x=3$ ein Maximum!

Diese Behauptung ist richtig, denn: $f'(x) = x^2 - 9 = 0$ hat als Lösungen $x_1=3$ und $x_2=-3$. Da $f''(x) = 2x$ und daher $f''(-3) = -6 < 0$ ist, hat $f(x)$ bei $x=3$ ein Maximum!

3) a) Zeige, dass $f(x) = 2x^3 + 4x - 1$ und $g(x) = -5x^2 - 2$ einander im Punkt $P(-1, -7)$ berühren! (Tipp: $f(x)$ und $g(x)$ haben in P eine gemeinsame Tangente!)

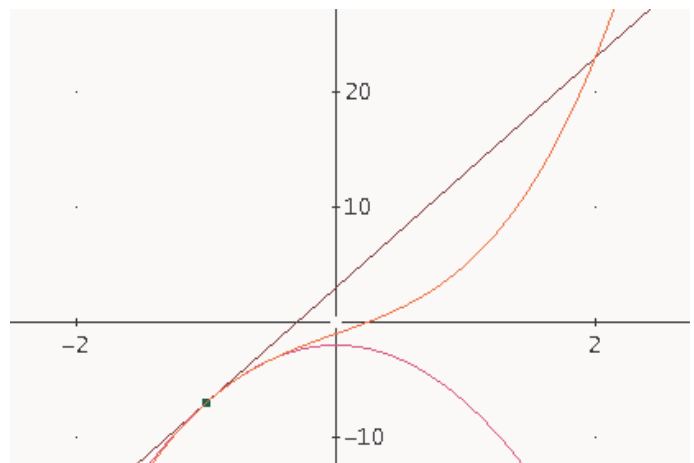
Es gilt: $f(-1) = -7$ und $g(-1) = -7$. Die beiden Funktionen enthalten daher P als gemeinsamen Punkt. $f'(x) = 6x^2 + 4$ und $g'(x) = -10x$. Es gilt $f'(-1) = 10$ und $g'(-1) = 10$. Die Tangentensteigung beträgt daher in P an beide Funktionen $k_t=10$.

b) Bestimme die Gleichung der gemeinsamen Tangente an $f(x)$ und $g(x)$ im Punkt P und zeichne beide Funktionen sowie die gemeinsame Tangente!

Die Gleichung der gemeinsamen Tangente t berechnet man aus: $-7 = -10 + d$, woraus $d=3$ folgt. Die Gleichung der gemeinsamen Tangente t lautet daher: $t: y = 10x + 3$. Die nebenstehende Skizze veranschaulicht die Lage der beiden Funktionen sowie der gemeinsamen Tangente.

c) In welchen Punkten verlaufen die Tangenten an $f(x)$ parallel zur Geraden $g: y = 10x + 1$? Bestimme ihre Gleichungen!

Dazu bestimmt man $f'(x) = 6x^2 + 4 = 10$ und daraus: $x_1=1$ und $x_2=-1$. Es sind daher die Tangenten in den Punkten



P(1, 5) und Q(-1, -7). Die Tangente in P lautet: $y=10x - 5$. Die Tangente in Q wurde bereits bei b) berechnet.

4) a) Bestimme für die Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x$ Lage und Art aller Extremwerte!

Man bestimmt $f'(x) = x^2 - 3x - 4 = 0$ und daraus: $x_1 = -1$ und $x_2 = 4$ als Punkte mit waagrechter Tangente.

Wegen $f''(x) = 2x - 3$ und $f''(-1) = -5 < 0$ und $f''(4) = 5 > 0$ ist $E_1(-1, \frac{13}{6})$ ein lokales Maximum und $E_2(4, -\frac{56}{3})$ ein lokales Minimum.

b) Besitzt $f(x)$ auch einen Wendepunkt? Falls ja, berechne ihn!

Wegen $f''(x) = 2x - 3 = 0$ für $x = \frac{3}{2}$ ist $W(\frac{3}{2}, -\frac{33}{4})$ ein Wendepunkt der Funktion!

c) Skizziere den Verlauf der Kurve möglichst genau!

Die folgende Skizze veranschaulicht die Lage der Funktion $f(x)$!

