2. Schularbeit

8C 17. 3. 2009

1) Durch das Maximum der Funktion $f(x) = -{}^{1}/_{3}\,x^3 + {}^{3}/_{2}\,x^2$ verläuft die Kurve $g(x) = ax^2 + bx$, die an dieser Stelle ebenfalls ein Maximum aufweist.
a) Wie lautet die Gleichung von g(x)? Kontrolliere die Lage des Extremwerts!
b) Bestimme Nullstellen, Extremwerte und allfällige Wendepunkte von f(x) und g(x)!
c) Skizziere beide Kurven möglichst genau!
d) Berechne den Inhalt jener Fläche, die von den beiden Kurven zwischen den Extremwerten von f(x) gebildet wird!

2) Die Gerade g: $4x + 3y = 48$ ist Tangente im Punkt $T_1(6, y)$ an einen Kreis, der seinen Mittelpunkt auf der Geraden h: $4x – y = 3$ hat.
a) Bestimme die Gleichung dieses Kreises!
b) Zeige, dass auch die Gerade i: $-4x + 3y = 32$ Kreistangente für den Kreis mit M(2, 5) und r=5 ist und berechne die Koordinaten des Berührpunktes T_2!
c) Zeige, dass auch die x-Achse Kreistangente ist und dass das Dreieck, das von g, i und der x-Achse gebildet wird, gleichschenklig ist!

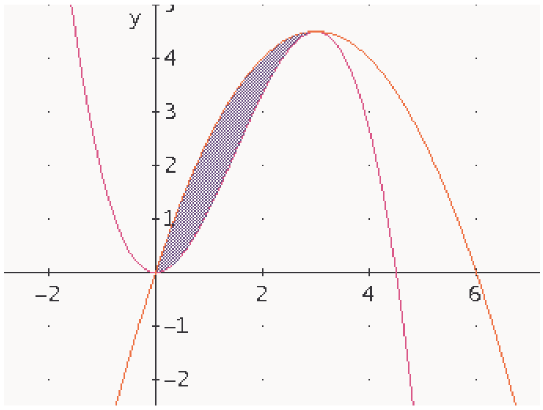
3) Von einer Ellipse kennt man a=10 und den Brennpunkt $F_1(5\cdot\sqrt{3}, 0)$.
a) Bestimme die Gleichung der Ellipse und skizziere ihren Verlauf!
b) In P(8, y>0) wird diese Ellipse von einer Funktion $f(x) = ax^2 + b$ berührt. Bestimme die Gleichung dieser Funktion sowie die Gleichung der gemeinsamen Tangente!
c) Durch P geht auch eine Parabel in erster Hauptlage. Berechne die Gleichung der Parabel und den Schnittwinkel von Ellipse und Parabel in P!

4) Perlenfischen zählt in der Südsee nach wie vor zu einem beliebten „Volkssport“. Taucher Hong Hang erhält von seinem österreichischen Auftraggeber „Österperl“ für jede abgelieferte Muschel 10 Cent. Erfahrungsgemäß enthalten 16% aller Muscheln genau eine Perle, die übrigen enthalten keine Perle.
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Unternehmer für 1 Euro
i) zumindest 2 Perlen erhält?
ii) keine einzige Perle erhält?
b) „Österperl“ kauft um 80€ Muscheln ein. Bestimme einen 90% Schätzbereich für die Anzahl der Perlen in dieser Lieferung!
c) Die letzte Lieferung (Einkaufswert 60€) enthielt 121 Perlen. Was kann man statistisch aus dieser Stichprobe schließen? Teste mit 95% statistischer Sicherheit!

[1)a)2P. b)4P. c)2P. d)2P. 2)a)2P b)2P. c)2P. 3) a)1P. b)3P. c)3P. 4) a)2P. b)2P. c)1P.]

Lösungen:

1) a) bzw. b) Für die Nullstellen von f(x) berechnet man $N_1(0, 0)$ und $N_2(^9/_2, 0)$.
Wegen $f'(x) = -x^2 + 3x = 0$ gilt: f(x) hat eine waagrechte Tangente bei $E_1(0, 0)$ und $E_2(3, ^9/_2)$.
Da $f''(x) = -2x + 3$ ist, gilt $f''(0) = 3>0$ und $f''(3)=-3<0$, daher ist E_1 ein lokales Minimum, E_2 ein lokales Maximum. In $W(^3/_2, ^9/_4)$ liegt ein Wendepunkt vor! Weil g(x) in E_2 ebenfalls ein Maximum aufweist gilt: $g(3) = ^9/_2$ und $g'(3)=0$, daher ist: $9a + 3b = ^9/_2$ und $6a + b=0$, woraus man $a= -^1/_2$ und $b=3$ berechnet. g(x) hat daher die Gleichung: $g(x) = -^1/_2 x^2 + 3x$.
g(x) hat Nullstellen bei $N_1(0, 0)$ und $N_2(6, 0)$ sowie das lokale Maximum in E_2.
c) Die folgende Skizze veranschaulicht die Lage der beiden Kurven und die von ihnen zwischen den Extremwerten aufgespannte Fläche:

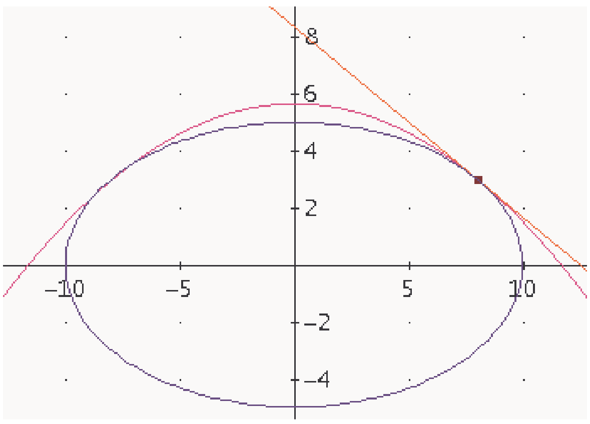


d) Für diese Fläche gilt:

$$A = \begin{aligned}&\int_0^3 g(x) - f(x)dx = \\ &\int_0^3 -\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 dx = \\ &\int_0^3 \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x dx = \frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \Big|_0^3 \\ &\frac{27}{4} - 18 + \frac{27}{2} = \frac{9}{4} FE\end{aligned}$$

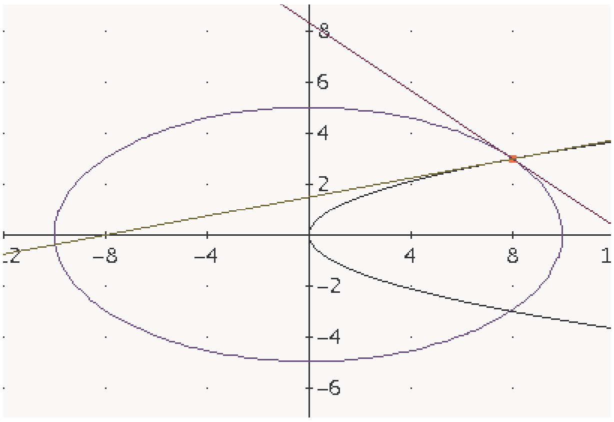
2) a) Für T berechnet man T(6, 8). Den Mittelpunkt des Kreises bestimmt man, indem man eine Normale n auf g durch T legt und mit h schneidet. Es gilt: $n: -3x + 4y = 14$ und man erhält für M(2, 5). Der Radius ist $r=|MT| = 5$.
b) i: $-4x + 3y = 32$ ist Tangente, denn $k=^4/_3$ und $d=^{32}/_3$. Einsetzen in die Berührbedingung liefert:
$(^4/_3 \cdot 2 - 5 + ^{32}/_3)^2 = 25\cdot(^{16}/_9 + 1)$.
Den Berührpunkt bestimmt man, indem man i mit der Normalen n_1 auf i durch M schneidet: Es gilt:
n_1: $3x + 4y = 26$ und man erhält $T_2(-2, 8)$.
c) Da der Mittelpunkt bei M(2, 5) liegt und der Radius r=5 ist, muss auch die x-Achse Tangente sein. Das Dreieck, das von g, i und der x-Achse gebildet wird, hat folgende Eckpunkte:
$S(2, ^{40}/_3)$, T(12, 0) und U(-8, 0). Weil |ST| = |SU|, ist das Dreieck gleichschenklig!

3) a) Aus F liest man $e^2=75ab$, a=10. daher gilt: $b^2=25$ und die Gleichung der Ellipse lautet:
ell: $25x^2 + 100y^2 = 2500$ oder $x^2 + 4y^2 = 100$. P(8, 3) liegt auf der Ellipse. Die Gleichung der Tangente in P an die Ellipse lautet: t: $2x + 3y = 25$. Man liest $k=-^2/_3$ und $d=^{25}/_3$ ab.
b) Für $f(x)= ax^2 + b$ gilt daher: $f(8) = 3$ und $f'(x) = 2ax$, daraus folgt $a= -^1/_{24}$. Für b erhält man $b=^{17}/_3$. t ist klarerweise gemeinsame Tangente an die beiden Kurven. Die folgende Skizze veranschaulicht die Lage im Koordinatensystem:



c) Die Gleichung einer Parabel durch P(8, 3) lautet: $y^2 = 2px$ und daher $y^2 = {}^9/_8\, x$. Die Tangente in P lautet: $3y = {}^9/_{16} \cdot (x+8)$ oder $-\,{}^9/_{16}\, x + 3y = {}^9/_2$ oder $-9x + 48y = 72$ oder $-3x + 16y = 24$.
Für den Schnittwinkel berechnet man: $\varepsilon = 44{,}31°$.

Die Skizze zeigt nochmals beide Kurven:



4) a) i) P(mindestens 2 Perlen) = 1- [P(0) + P(1)] = $1 - [0{,}84^{10} + 10 \cdot 0{,}16 \cdot 0{,}84^9] =$
$1 - [0{,}1749 + 0.3331] = 0{,}492$.
ii) P(keine Perle) = $0{,}84^{10} = 0{,}1749$.
b) Bei 80€ bedeutet dies: 800 Muscheln. Man bestimmt E(x) = 128 und $\sigma = \sqrt{800 \cdot 0{,}16 \cdot 0{,}84} = 10{,}37 > 3$, daher kann mittels Normalverteilung approximiert werden. Für die Grenzen des 90% Schätzbereiches bestimmt man: $x_u = 110{,}94$ und $x_o = 145{,}06$, der Schätzbereich umfasst daher: [111 ; 145].
c) Für n=600 gilt: E(x) = 96. Es gilt: $\sigma = \sqrt{600 \cdot 0{,}16 \cdot 0{,}84} = 8{,}98 > 3$, daher kann mittels Normalverteilung approximiert werden. Für die obere Grenze berechnet man: $x_o = 110{,}85$. da das Stichprobenergebnis deutlich über dem kritischen Wert liegt, kann man mit 95% statistischer Sicherheit von deutlich höherer Qualität ausgehen.