4. Schularbeit

6CR 4.6.2009

1) Gegeben sind die beiden Geraden g: X=(1, -2, 1) + s · (-2, 1,3) und h: X=(5, -4, -5) + t · (-1, 1, 1) sowie die Ebene E durch P(1, -2, 1), die h enthält!

a) Bestimme die gegenseitige Lage der beiden Geraden g und h!

b) Bestimme die Gleichung der Ebene E in Normalvektorform!

c) Berechne den Schnittwinkel zwischen g und der Ebene E!

2) Die Punkte A(-4, 1, 5) und B(0, 1, 1) bilden die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen dritter Eckpunkt C auf der Geraden g: X=(1, -2, 2) + t · (3, 1, -1) liegt. Zeige, dass der Eckpunkt C die Koordinaten C(-2, -3, 3) hat und berechne den Flächeninhalt des Dreiecks!

3) Die Alarmanlage „Robstop" enthält zwei Bauteile A und einen Bauteil B. A versagt mit p_A=0,01, B versagt mit p_B=0,001.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Bauteile der Anlage fehlerfrei arbeiten?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zumindest ein Bauteil versagt? Zeichne dazu ein Baumdiagramm!

c) Offensichtlich kann man durch Verwendung von zwei Bauteilen B und nur einem Bauteil A die Sicherheit der Anlage erhöhen. Wie groß ist der Gewinn an Sicherheit gegenüber a)?

d) Das Nachfolgemodell „Robstop Pro" enthält zwei Bauteile A und 2 Bauteile B mit denselben Ausfallswahrscheinlichkeiten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 1 Bauteil versagt?

4) Erfahrungsgemäß fallen 35% der Kandidaten bei der theoretischen Fahrprüfung durch. Im Zimmer des Prüfers sitzen drei Kandidaten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) alle durchfallen? b) mindestens einer durchkommt? c) alle durchkommen?

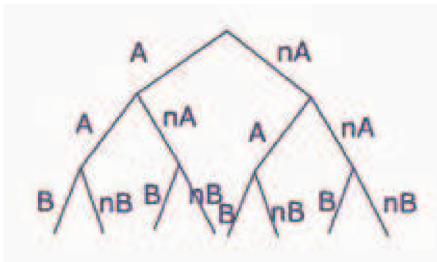
d) Erkläre, welche Annahmen hinsichtlich Unabhängigkeit bei diesem Beispiel getroffen werden und welchem Ziehungsmodell das Beispiel entspricht!

[1) a)2P. b)2P. c)1P 2) 5P. 3)a)1P. b)2P. c) 1P. d) 2P. 4) a)1P. b)1P. c) 1P. d) 1P.]

Lösungen:
1) a) Die beiden Geraden g: X=(1, -2, 1) + s · (-2, 1, 3) und h: X=(5, -4, -5) + t · (-1, 1, 1) sind nicht parallel, daher können sie nur einen Schnittpunkt haben oder windschief sein.
Setzt man g und h gleich, erhält man: 1 – 2s = 5 – t, -2 + s = -4 + t, 1 + 3s = -5 + t. Addiert man die ersten beiden Gleichungen, erhält man s=-2 und weiter t=0. Einsetzen in die dritte Gleichung bestätigt die Ergebnisse, es liegt daher ein Schnittpunkt bei S(5, -4, -5) vor!
b) Die Ebene E durch P(1, -2, 1), die h enthält, hat als Richtungsvektoren die Vektoren a =(4, -2, -6) und b=(-1, 1, 1). Für den Normalvektor der Ebene berechnet man: n=(4, 2, 2) bzw. (2, 1, 1). Die Ebene E hat daher die Gleichung E: 2x + y + z = 1.
c) Dass h in der Ebene E liegt, ist klar. Weil aber S auf g liegt, verläuft der zweite Richtungssvektor in Richtung g, d.h. auch g liegt in der Ebene. Es kann daher keinen (echten) Schnittwinkel geben bzw. er ist 0°. Man erkennt dies, indem man in die Winkelformel einsetzt. Dort erhält man cos(α)=0 und damit α=90° als Winkel zwischen dem Normalvektor der Ebene und dem Richtungsvektor der Geraden. Damit ist auch beweisen, dass g in der Ebene E liegt! (Achtung: Schnittwinkel zwischen Ebene und Geraden ist der komplementäre Winkel zu jenem Winkel, den Richtungsvektor der Geraden und Normalvektor der Ebene bilden!)

2) Die Punkte A(-4, 1, 5) und B(0, 1, 1) bilden die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen dritter Eckpunkt C auf der Geraden g: X=(1, -2, 2) + t · (3, 1, -1) liegt. Man bestimmt C, indem man durch den Mittelpunkt M_{AB}=(-2, 1, 3) eine Ebene normal auf AB=(4, 0, -4) aufstellt und diese Ebene mit der Geraden g schneidet! Für E erhält man E: 4x – 4z =-20 oder: x – z = -5. Schneidet man E mit g, erhält man:
1 + 3t - (2 – t) = -5 und 1 + 3t – 2 + t=-5, daraus: t=-1 und damit C(-2, -3, 3). Den Flächeninhalt des Dreiecks bestimmt man am schnellsten über die Länge der Höhe h_c=|MC| = 4. Die Basis AB hat die Länge |AB|= $4\cdot\sqrt{2}$.
Die Fläche des Dreiecks beträgt daher: A= $8\cdot\sqrt{2}$.

3) Die Alarmanlage „Robstop" enthält zwei Bauteile A und einen Bauteil B. A versagt mit p_A=0,01, B versagt mit p_B=0,001.
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Bauteile der Anlage fehlerfrei arbeiten?
P(fehlerfrei) = $0{,}99^2 \cdot 0{,}999 = 0{,}9791$.
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zumindest ein Bauteil versagt? Zeichne dazu ein Baumdiagramm!
P(mindestens ein Bauteil versagt) = 1 – P(alle funktionieren) =
= 1 - 0,9791 = 0,021.



c) Offensichtlich kann man durch Verwendung von zwei Bauteilen B und nur einem Bauteil A die Sicherheit der Anlage erhöhen. Wie groß ist der Gewinn an Sicherheit gegenüber a)?
P(alle funktionieren) = $0{,}999^2 \cdot 0{,}99 = 0.9880$, d.h. Sicherheit um ca. 1% erhöht!
d) Das Nachfolgemodell „Robstop Pro" enthält zwei Bauteile A und 2 Bauteile B mit denselben Ausfallswahrscheinlichkeiten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 1 Bauteil versagt?
P(höchstens 1 Bauteil versagt) = P(keiner versagt) + P(genau ein Bauteil versagt)=
$0{,}99^2 \cdot 0{,}999^2 + 2\cdot 0{,}01\cdot 0{,}99\cdot 0{,}999^2 + 2\cdot 0{,}99^2 \cdot 0{,}001\cdot 0{,}999 = 0{,}9781 + 0{,}0217 = 0{,}99986$.
Beachte: P(genau 1 Bauteil versagt) = P(nA,A,B,B) + P(A,nA,B,B) + P(A,A,nB,B) + P(A,A,B,nB).
Die ersten beiden und die letzten beiden Ereignisse haben dieselbe Wahrscheinlichkeit!

4) Erfahrungsgemäß fallen 35% der Kandidaten bei der theoretischen Fahrprüfung durch. Im Zimmer des Prüfers sitzen drei Kandidaten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
a) alle durchfallen? P(alle fallen durch) = $0{,}35^3 = 0{,}0429$
b) mindestens einer durchkommt?
P(mindestens einer kommt durch) = 1 – P(alle fallen durch) = 1-0,0429= 0,9571.
c) alle durchkommen? P(alle kommen durch) = $0{,}65^3 = 0{,}2746$.
d) Erkläre, welche Annahmen hinsichtlich Unabhängigkeit bei diesem Beispiel getroffen werden und welchem Ziehungsmodell das Beispiel entspricht!
Annahme: Unabhängigkeit, d.h. der Erfolg oder Misserfolg eines Kandidaten beeinflusst nicht das Prüfungsergebnis des nächsten Kandidaten. Ziehungsmodell: „Ziehen mit Zurücklegen", da sich die Wahrscheinlichkeiten innerhalb der Zugfolge nicht ändern!