2. Schularbeit

6CR 22.1.2009

1) Die nebenstehende Graphik zeigt die Entwicklung der Unternehmensneugründungen in Österreich im Zeitraum 1995-2006.

a) Beschreibe die Entwicklung durch ein lineares Modell und bestimme die Modellgleichung!
b) Beschreibe die Entwicklung durch ein nichtlineares Modell und bestimme die Modellgleichung!
c) Berechne für beide Modellgleichungen den Wert für das Jahr 2000! Welches Modell passt besser und warum?
d) Mit wie vielen Unternehmensneugründungen kann man im Jahre 2010 rechnen (verwende dazu **beide** Modellgleichungen!)

2) Familie Schlucker seit 15 Jahren monatlich 350.-€ bei einem Zinssatz von 3% p.a. Das Haus kostet derzeit 160000.-€.
a) Wieviel hat die Familie bisher erspart? Reicht das bisher ersparte Geld für den Hauskauf aus? Wie lange müsste man für das Haus tatsächlich sparen?
b) Ein etwas kleineres ziemlich abgewohntes Haus in schlechter Wohnlage wäre schon für 110000.-€ zu haben. Familie Schlucker beschließt, den fehlenden Betrag über einen Kredit zu finanzieren. Dieser soll innerhalb von 10 Jahren monatlich zurückgezahlt werden (Zinssatz 6% p.a.). Wie hoch wird die monatliche Rate sein? (monatliche Verzinsung!)

3) Das radioaktive Element Thorium 234 zerfällt sehr rasch. Seine Halbwertszeit beträgt nur ca. 25 Tage.
a) Stelle das Abbaugesetz in der Form $N_t=N_0 \cdot q^t$ und in der Form $N_t = N_0 \cdot e^{-at}$ dar! Wie groß ist die Konstante a?
b) Welche Menge an Thorium ist nach 1 Jahr (365 Tage) noch übrig, wenn ursprünglich 8mg Thorium vorhanden waren?
c) Wann ist die Menge auf weniger als 10% der Anfangsmenge gesunken? Erkläre, weshalb dieser Zeitraum unabhängig von der Anfangsmenge ist!

4) Gegeben ist die Folge $a_n=\left\langle \frac{5n+2}{2n-1} \right\rangle$.
a) Berechne die ersten 4 Folgenwerte und stelle eine Vermutung über die Monotonie der Folge auf!
b) Beweise diese Vermutung!

[1) a)2P. b)2P. c)2P. d) 2P. 2)a)2P. b)3P. 3)a)3P. b)1P. c) 2P. 4) a)1P. b)2P.]

Lösungen:

1) a) Für das lineare Modell erhält man die Modellgleichung:

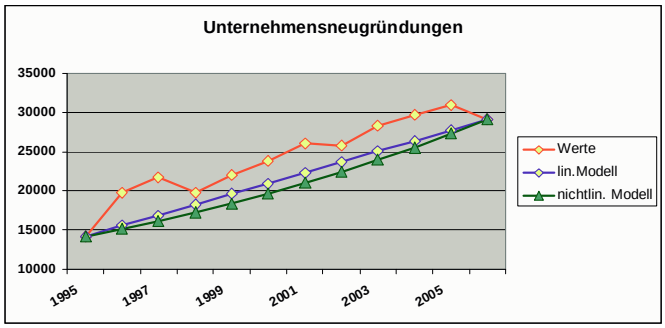
$U_t = 14161 + 1358{,}18 \cdot t$

b)) Für das nichtlineare Modell erhält man die Modellgleichung:

$U_t = 14161 \cdot 10{,}6767146^{\,t}$

Die folgende Tabelle veranschaulicht die Modellwerte für die beiden Modelle, die Graphik zeigt die Qualität der Trendfunktionen.

Jahr	Werte	lin.Modell	nichtlin. Modell
1995	14161	14161,00	14161,00
1996	19843	15519,18	15119,30
1997	21706	16877,36	16142,44
1998	19722	18235,55	17234,82
1999	21954	19593,73	18401,13
2000	23762	20951,91	19646,36
2001	26035	22310,09	20975,86
2002	25828	23668,27	22395,33
2003	28322	25026,45	23910,85
2004	29740	26384,64	25528,93
2005	31001	27742,82	27256,51
2006	29101	29101,00	29101,00



Beide Modelle zeichnen die wesentliche Entwicklung nach, allerdings lässt die Qualität der Näherung bei beiden Modellgleichungen zu wünschen übrig. Die Prognose dürfte demnach ebenfalls sehr ungenau sein. Grund dafür wird die (kaum vorhersehbare) Entwicklung der Unternehmensneugründungen sein, die stark von der globalen Entwicklung der Wirtschaft abhängig sein dürfte!

Im Jahre 2010 sind es nach dem linearen Modell ca. 34533 Unternehmen, nach dem nichtlinearen Modell ca. 37814 Unternehmen (Werte nicht gerundet!)

2)

a) Nach der Summenformel erhält man für den angesparten Betrag mit r=350.-€, n = 180 und q=1,0025:

S= 79440,44€. Der Betrag reicht also nicht aus!

Man müsste ca. 306 Monate (oder $25^1/_2$ Jahre) sparen!

b) Auf 110000.-€ fehlen noch: 30559,56€.

Um diesen Betrag innerhalb von 120 Monaten ei einem monatlichen Zinssatz von 0,5% (relativer Zinssatz) zurückzuzahlen, muss man mit einer Rate von: r=339,27€ rechnen.

3)

a) Aus der Halbwertszeit von 25 Tagen berechnet man q folgend:

$B_t = B_0 \cdot q^t$ $\qquad$ $^1/_2 = q^{25}$ und daraus q= 0,9726549474.

Wegen $e^{-a} = q$ gilt: a= -ln(q) = -ln(0,9726549474) = 0,0277258872

Das Zerfallsgesetz lautet demnach $B_t = B_0 \cdot 0{,}9726549474^t$ oder $B_t = B_0 \cdot e^{-0{,}0277258872 \cdot t}$

b) Nach 365 Tagen sind noch 0,00032mg vorhanden!

c) Man berechnet t= 83,05 Tage – die Zerfallszeit ist für bestimmte relative Anteile unabhängig von der Ausgangsmenge, da man stets den Faktor B_0 aus der Gleichung kürzen kann!

4) a) Man berechnet für n=0, 1, 2, 3, … $\left\langle \frac{5n+2}{2n-1} \right\rangle = \left\langle -2,7, \frac{17}{5}, \frac{22}{7}, \ldots \right\rangle$

Vermutung: Die Folge ist streng monoton fallend!

b) Beweis:

Es muss für alle n gelten: $a_n > a_{n+1}$, d.h.

$$\frac{5n+2}{2n-1} > \frac{5(n+1)+2}{2(n+1)-1}$$

$$\frac{5n+2}{2n-1} > \frac{5n+7}{2n+1}$$

$$\frac{10n^2+9n+2}{(2n-1)(2n+1)} > \frac{10n^2+9n-7}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$2 > -7$$

Womit die Monotonie bewiesen ist!