2. Schularbeit

8C 8. 4. 2008

1) Die Funktion $f(x) = (a + bx)e^{x}$ hat den Hochpunkt H (1, e).
   a) Bestimme die Gleichung der Funktion!
   b) Untersuche, ob Nullstellen, weitere Extremwerte und Wendepunkte vorliegen!
   c) Skizziere den Verlauf der Funktion im Intervall [-4; 3] möglichst genau!

2) Die Ellipse $3x^2 + 5y^2 = 120$ und eine Hyperbel haben die Brennpunkte und den Punkt P(5, y>0) gemeinsam.
   a) Ermittle aus diesen Angaben die Gleichung der Hyperbel!
   b) Zeige, dass die beiden Kurven einander unter einem Winkel von 90° schneiden!
   c) Das von beiden Kurven und den positiven Koordinatenachsen eingeschlossene Flächenstück rotiert um die x-Achse. Wie groß ist das Volumen des entstehenden Drehkörpers?

3) Gegeben ist das Dreieck ABC [A(4, -12), B(-2, 6), C(-12, -4)].
   a) Berechne die Gleichung des Umkreises des Dreiecks!
   b) Gib die Gleichung der Tangente t im Punkt A an und zeige, dass sich der Flächeninhalt des gegebenen Dreiecks zum Flächeninhalt des Dreiecks 0XY, das vom Koordinatenursprung und den Schnittpunkten X und Y der Tangente t mit den Koordinatenachsen begrenzt wird, wie 4 : 5 verhält!

4) Nach der Einführung der Autobahnvignette in Österreich betrug Statistiken zufolge der Anteil der AutobahnbenutzerInnen, die keine Vignette geklebt haben, 3 %.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass auf einem Autobahnrastplatz
   i) nicht alle der zwölf parkenden Autos eine Vignette geklebt haben?
   ii) mindestens 2 der 12 parkenden Autos keine Vignette geklebt haben?

b) Eine Polizeistreife überprüft täglich etwa 400 Autos auf Autobahnen. Wie viele FahrerInnen ohne Vignette wird diese Streife im Mittel täglich antreffen? In welchem Bereich liegt mit 90 % iger Wahrscheinlichkeit die Anzahl der FahrerInnen ohne Vignette, die die Polizeistreife an einem Tag antrifft?

[1) a)2P b)4P. c) 2P 2) a) 3P b) 2P. c) 3P. 3) a) 3P. b) 5P. 4) a)2P. b) 2P.]

Lösungen:

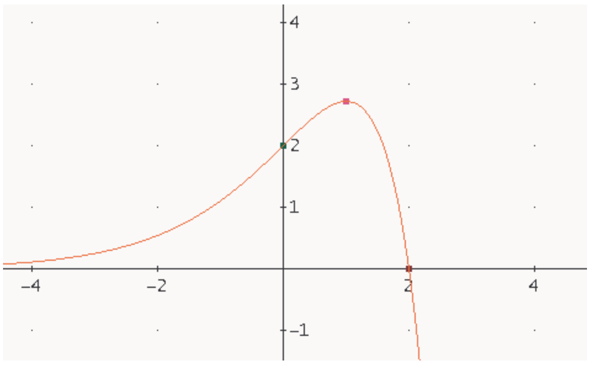
1) a) $f(x) = (a + bx)e^x$. Man bestimmt f ’(x) = b e^x + (a+bx) e^x = e^x · (a + b + bx) und daraus wegen f(1) =e und f ’(1)=0: (a + b) · e = e bzw. a + 2b = 0.

Die beiden Gleichungen : a + b = 1 und a + 2b = 0 ergeben: a=2 und b= -1. Die Funktionsgleichung lautet daher: f(x) = (2 –x) · e^x.

b) Die Funktion hat bei N(2, 0) eine Nullstelle. Aus f ’(x) = e^x ·(1 – x) = 0 berechnet man den Extremwert E(1, e), der bereits gegeben war(Kontrolle!). Es ist dies der einzige Extremwert der Funktion!

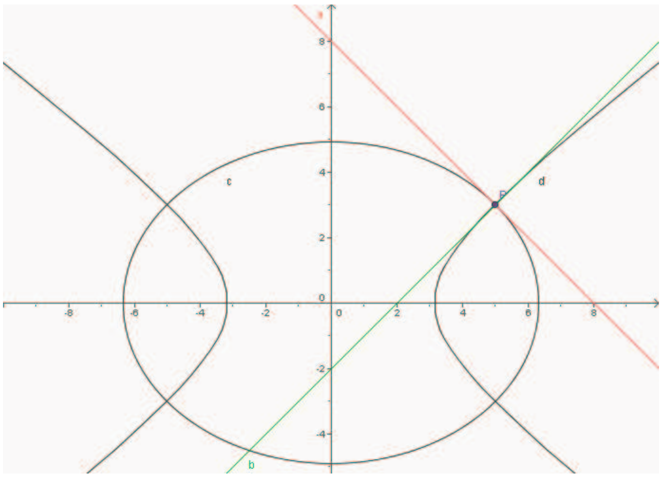
Wegen f ’’(x) = -x · e^x = 0 liegt bei W(0, 2) ein Wendepunkt vor!

c) Die folgende Skizze zeigt den Verlauf der Funktion:



2) a)Aus der Gleichung der Ellipse 3x² + 5y² = 120 berechnet man a^2=40 und b^2 = 24, woraus sich wegen $e^2 = a^2 – b^2$ die Brennpunkte F_1(4, 0) und F_2(-4, 0) ergeben. Für den Punkt P erhält man nach Einsetzen: P(5, 3). Für die Hyperbel gilt daher: $25b^2 – 9a^2 = a^2b^2$ und $a^2 + b^2 = 16$. Daraus berechnet man für die Hyperbel: a^2= 10 und b^2 = 6. Die Gleichung der Hyperbel lautet daher $6x^2 – 10y^2 = 60$ oder $3x^2 - 5y^2 =30$.

b) Da P(5, 3) einer der Schnittpunkte von Hyperbel und Ellipse ist, kann man in P die Tangenten an beide Kurven legen. Man erhält für $t_{ell:}$ 120x + 120y = 960 oder x + y = 8. Für t_{hyp} ergibt sich: 30x – 30y = 60 oder x - y = 2. Da die beiden Tangenten aufeinander normal stehen, schneiden die beiden Kurven einander im rechten Winkel. Die folgende Skizze veranschaulicht die Lage im Koordinatensystem:



c)

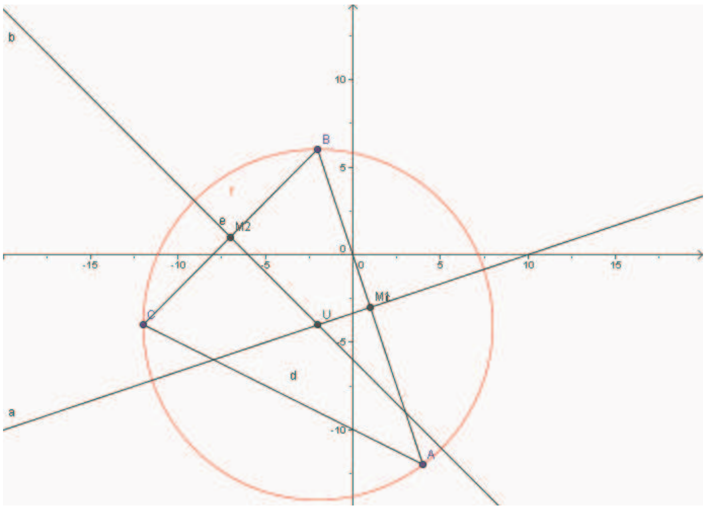
Das gesuchte Volumen setzt sich aus zwei Volumsteilen zusammen, die man folgend berechnen kann:

V_1= $\pi \cdot \int_0^5 \frac{120}{5} - \frac{3}{5}x^2 dx = \frac{120}{5}x - \frac{1}{5}x^3 \Big|_0^5 = 95\pi$ Volumseinheiten.

V_2= $\pi \cdot \int_{\sqrt{10}}^5 \frac{3}{5}x^2 - 6dx = \frac{1}{5}x^3 - 6x \Big|_{\sqrt{10}}^5 = \left(4 \cdot \sqrt{10} - 5\right)\pi$ Volumseinheiten.

Das Gesamtvolumen beträgt daher V=V_1 – V_2 = 274,42 Volumseinheiten.

3) a) Für das Dreieck ABC [A(4, -12), B(-2, 6), C(-12, -4)] berechnet man zunächst die Mittelpunkte zweier Seiten, z. B. M_{AB} = (1, -3) und M_{BC}=(-7, 1). Für die Vektoren AB und BC erhält man:
AB=(-6, 18) oder (-1, 3) bzw. BC=(-10, -10) oder(-1, -1). Die Gleichungen der Seitensymmetralen lauten daher: s_{AB}: $-x + 3y = -10$ und s_{BC}: $x + y = -6$. Für den Umreismittelpunkt erhält man daher: U(-2, -4).
Die Gleichung des Umkreises lautet daher: $(x+2)^2 + (y+4)^2 = 100$. Die folgende Skizze veranschaulicht die Lage im Koordinatensystem:



c) Die Tangente t an den Kreis im Punkt A lautet:
t: $(x+2)\cdot 6 + (y+4)\cdot(-8) = 100$ oder $6x - 8y = 120$ oder $3x – 4y = 60$. Schneidet man t mit den Koordinatenachsen, erhält man: X(20, 0) und Y(0,-15). Das Dreieck OXY hat daher die Fläche A=150. Die Fläche des gegebenen Dreiecks kann man folgend berechnen: Man schneidet die Gerade g durch A und B mit der Gleichung: $3x + y = 0$ mit der Höhe auf c, die die Gleichung: $-x + 3y = 0$ und erhält als Schnittpunkt O(0, 0). Die Länge der Höhe auf c beträgt daher: $h_c = \sqrt{160} = 4 \cdot \sqrt{10}$. Für die Seite c gilt: $c = 6 \cdot \sqrt{10}$. Die Fläche ist daher A=120.Damit ist das angegebene Verhältnis bewiesen.

4) a) i) P(nicht alle habe Vignette) = 1- P(alle haben Vignette) = $1 – 0{,}97^{12} = 0{,}3062$.
ii) P(mindestens 2 keine Vignette) = 1- (P(alle haben Vignette) + P(1 hat keine Vignette)) =
$1 – (0{,}6938 + 0{,}2575) = 0{,}0487$.

b) Der Erwartungswert liegt bei $400 \cdot 0{,}03 = 12$, die Standardabweichung bei $\sigma=3{,}4117$. Da $\sigma>3$ gilt, kann die Normalverteilung als Näherung verwendet werden. Man erhält für die Grenzen des Schätzbereichs mit 90% Wahrscheinlichkeit: $x_u = 12 – 1{,}645\cdot\sigma = 6{,}39$ und $x_o = 12 + 1{,}645\cdot\sigma = 17{,}61$. Der Schätzbereich umfasst daher die Werte [7; 17].