3. Schularbeit

7C / Gruppe A 30.5.2008

1) Von einer Ellipse kennt man die Koordinaten des Brennpunkts F(4, 0) sowie einen Punkt P(4, 6).
   a) Bestimme die Gleichung der Ellipse!
   b) Zeige, dass die Gerade h: $x + 2y = 16$ Tangente an die Ellipse ist und berechne den Berührpunkt!

2) a) Bestimme die Gleichungen jener Kreise, deren Mittelpunkte auf der x-Achse bzw. y-Achse liegen und die die Funktion $f(x)= {}^1/_4\, x^2 + 2$ in P(2, y>0) berühren!
b) Zeige, dass die Mittelpunkte dieser beiden Kreise gleich weit vom Koordinatenursprung entfernt sind und skizziere die Lage der Kurven!

3) Gegeben sind die Hyperbel hyp: $x^2 - y^2 = 9$ und die Gerade g: $x + 2y = -3$
   a) Bestimme die Koordinaten der Brennpunkte der Hyperbel!
   b) Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte von Hyperbel und Geraden!
   c) Stelle die Gleichung der Tangente t_1 an die Hyperbel im Schnittpunkt S_1 mit der positiven x-Koordinate auf!

4) $f(x) = {}^1/_2\, x^4 + {}^1/_2\, x^2 + ax + b$ hat in P(2, 4) die Steigung k=16. Bestimme die Gleichung der Funktion! Warum kann f(x) keine Wendepunkte haben?

[1) a) 4P. b) 3P. 2) a) 5P. b) 3P. 3)a) 2P. b) 4P. c)1P. 4) 4P.]

3. Schularbeit

7C / Gruppe B 30.5.2008

1) Von einer Ellipse kennt man die Koordinaten des Brennpunkts F($2\cdot\sqrt{2}$, 0) sowie einen Punkt P(3, 1).
   a) Bestimme die Gleichung der Ellipse!
   b) Zeige, dass die Gerade h: $x + y = 4$ Tangente an die Ellipse ist und berechne den Berührpunkt!

2) a) Bestimme die Gleichungen jener Kreise, deren Mittelpunkte auf der x-Achse bzw. y-Achse liegen und die die Funktion $f(x)= {}^1/_2\, x^2 + 4$ in P(2, y>0) berühren!
b) Zeige, dass der Kreismittelpunkt auf der x-Achse doppelt so weit vom Koordinatenursprung entfernt ist wie jener auf der y-Achse und skizziere die Lage der Kurven!

3) Gegeben sind die Hyperbel hyp: $3x^2 - y^2 = 3$ und die Gerade g: $x - y = -1$
   a) Bestimme die Koordinaten der Brennpunkte der Hyperbel!
   b) Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte von Hyperbel und Geraden!
   c) Stelle die Gleichung der Tangente t_1 an die Hyperbel im Schnittpunkt S_1 mit der positiven x-Koordinate auf!

4) $f(x) = {}^1/_4\, x^4 + {}^1/_2\, x^2 + ax + b$ hat in P(2, 3) die Steigung k=9. Bestimme die Gleichung der Funktion! Warum kann f(x) keine Wendepunkte haben?

[1) a) 4P. b) 3P. 2) a) 5P. b) 3P. 3)a) 2P. b) 4P. c)1P. 4) 4P.]

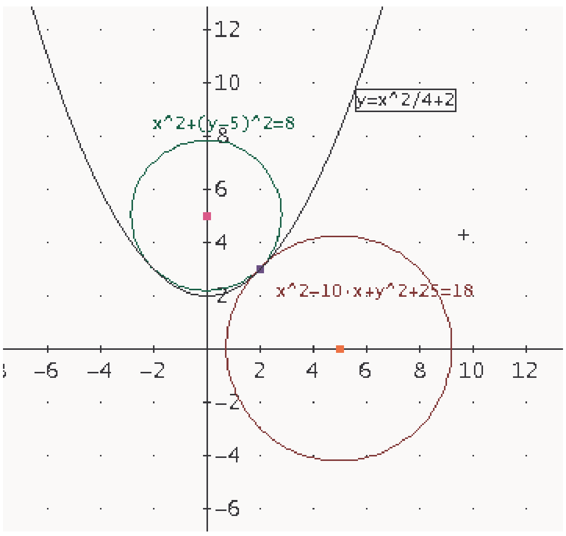
Lösungen:
Gruppe A:

1) a) Wegen e=4 gilt: $a^2 - b^2 = 16$. Da P(4, 6) auf der Ellipse liegt, gilt: $16b^2 + 36a^2 = a^2b^2$. Daraus berechnet man: $b^2 = 48$ und $a^2 = 64$. Die Ellipse hat daher die Gleichung $48x^2 + 64y^2 = 3072$ oder $3x^2 + 4y^2 = 192$.
b) $x + 2y = 16$ hat die Steigung $k = -\frac{1}{2}$ und d=8. Einsetzen in die Berührbedingung liefert:
$64 \cdot \frac{1}{4} + 48 = 64$, womit bewiesen ist, dass g Tangente an die Ellipse ist. Den Berührpunkt bestimmt man, indem man g mit der Ellipse schneidet. Man erhält:

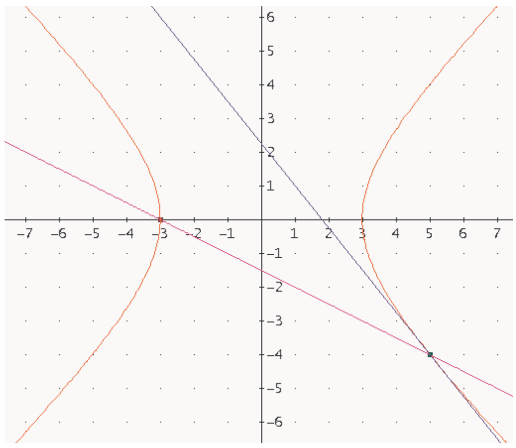
$$3 \cdot (16 - 2y)^2 + 4y^2 - 192 = 0$$

$768 - 192y + 12y^2 + 4y^2 - 192 = 0$
$16y^2 - 192y + 576 = 0$
$y^2 - 12y + 36 = 0$, woraus y=6 folgt, Der Berührpunkt ist daher P(4, 6)!

2) a) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2$ geht durch P(2, 3). Wegen $f'(x) = \frac{1}{2}x$ ist die Tangentensteigung in P: k=1. Die gemeinsame Tangente hat daher die Gleichung $y = x + 1$. Die Normale auf diese Tangente muss den Kreismittelpunkt enthalten, daher muss man n: $x + y = 5$ mit den beiden Achsen schneiden. Man erhält: $M_1(5, 0)$ und $M_2(0, 5)$. Die Radien der beiden Kreise berechnet man als Länge der Vektoren M_1P und M_2P als $r_1 = \sqrt{18}$ und $r_2 = \sqrt{8}$. Die Kreisgleichungen lauten daher:
k_1: $(x-5)^2 + y^2 = 18$ und k_2: $x^2 + (y-5)^2 = 8$. b) ist unmittelbar klar! Die folgende Skizze veranschaulicht die Lage der Kurven:



3) a) Die Brennpunkte der Hyperbel bestimmt man aus $e^2 = a^2 + b^2$ mit $a^2 = b^2 = 9$. Man erhält $F_1(3\cdot\sqrt{2}, 0)$ und $F_2(-3\cdot\sqrt{2}, 0)$.
b) Schneidet man hyp: $x^2 - y^2 = 9$ mit der Geraden g: $x + 2y = -3$, erhält man:
$(-3-2y)^2 - y^2 - 9 = 0$ und daraus:
$9 + 12y + 4y^2 - y^2 - 9 = 0$ $\quad 3y^2 + 12y = 0$ und daraus: $y_1 = 0$ und $y_2 = -4$.
Die Schnittpunkte liegen daher bei: $S_1(-3, 0)$ und $S_2(5, -4)$.
c) Die Gleichung der Tangente in S_2 lautet: $45x + 36y = 81$ oder $5x + 4y = 9$. Die folgende Skizze veranschaulicht die Lage der Kurven:



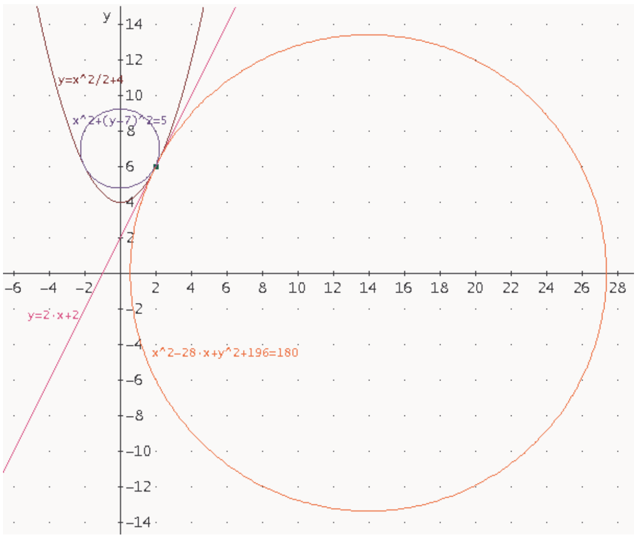
4) a) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + ax + b$ hat in P(2, 4) die Steigung k=16. Daher ist $f(2) = 4$ und $f'(2) = 16$. $\quad f'(x) = 2x^3 + x + a$
Man erhält daraus:
$8+2+2a+b=4$ und $16 + 2 + a = 16$, daraus a=-2 und b=-2.

Wegen f ''(x) = $6x^2 + 1$ kann f(x) keine Wendepunkte haben, da diese Gleichung keine reellen Lösungen hat!

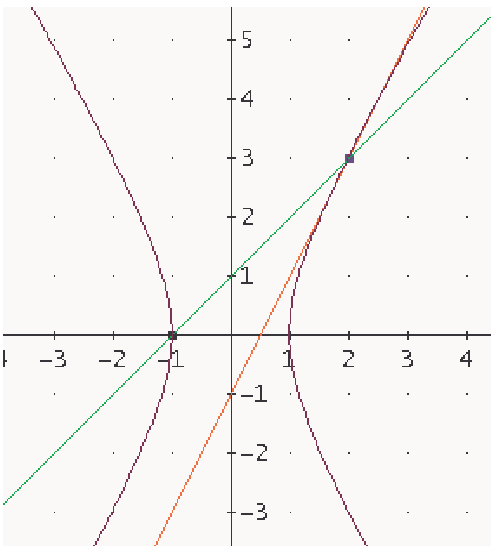
Gruppe B:

1) a) Wegen e= $2\cdot\sqrt{2}$ gilt: $a^2 - b^2 = 8$. Da P(3, 1) auf der Ellipse liegt, gilt: $9b^2 + a^2 = a^2b^2$. Daraus berechnet man: $b^2 = 4$ und $a^2 = 12$. Die Ellipse hat daher die Gleichung $4x^2 + 12y^2 = 48$ oder $x^2 + 3y^2 = 12$.
b) x + y = 4 hat die Steigung k= - 1 und d=4. Einsetzen in die Berührbedingung liefert: $12 \cdot 1 + 4 = 16$, womit bewiesen ist, dass g Tangente an die Ellipse ist. Den Berührpunkt bestimmt man, indem man g mit der Ellipse schneidet. Man erhält:
$(4-y)^2 + 3y^2 - 12 = 0$
$16 - 8y + y^2 + 3y^2 - 12 = 0$
$4y^2 - 8y + 4 = 0$
$y^2 - 2y + 1=0$, woraus y=1 folgt, Der Berührpunkt ist daher P(3, 1)!

2) f(x)= $\frac{1}{2} x^2 + 4$ geht durch P(2, 6). Wegen f '(x) = x ist die Tangentensteigung in P: k=2. Die gemeinsame Tangente hat daher die Gleichung y = 2x + 2. Die Normale auf diese Tangente muss den Kreismittelpunkt enthalten, daher muss man n: x + 2y = 14 mit den beiden Achsen schneiden. Man erhält: $M_1(14, 0)$ und $M_2(0, 7)$. Die Radien der beiden Kreise berechnet man als Länge der Vektoren M_1P und M_2P als $r_1=\sqrt{180}$ und $r_2=\sqrt{5}$. Die Kreisgleichungen lauten daher:
k_1: $(x-14)^2 + y^2 = 180$ und k_2: $x^2 + (y-7)^2 = 5$. b) ist unmittelbar klar! Die folgende Skizze veranschaulicht die Lage der Kurven:



3) a) Die Brennpunkte der Hyperbel bestimmt man aus $e^2 = a^2 + b^2$ mit $a^2=1$ und $b^2=3$. Man erhält $F_1(2, 0)$ und $F_2(-2, 0)$.
b) Schneidet man hyp: $3x^2 - y^2 = 3$ mit der Geraden g: x - y = -1, erhält man:
$3(-1+y)^2 - y^2 - 3=0$ und daraus:
$3-6y+3y^2 - y^2 -3=0$ $\quad 2y^2-6y=0$ und daraus: $y_1 = 0$ und $y_2=3$. Die Schnittpunkte liegen daher bei:
$S_1(-1, 0)$ und $S_2(2, 3)$.
c) Die Gleichung der Tangente in S_2 lautet: 6x -3y = 3 oder 2x - y = 1.
Die folgende Skizze veranschaulicht die Lage der Kurven:



4) a) $f(x) = {}^{1}/_{4}\, x^4 + {}^{1}/_{2}\, x^2 + ax + b$ hat in P(2, 3) die Steigung k=9. Daher ist f(2) = 3 und f '(2) = 9.

$f'(x) = x^3 + x + a$

Man erhält daraus:

4+2+2a+b=3 und 8 + 2 + a = 9, daraus a=-1 und b=-1.

Wegen $f''(x) = 3x^2 + 1$ kann f(x) keine Wendepunkte haben, da diese Gleichung keine reellen Lösungen hat!