2. Schularbeit

7C / Gruppe A 11.3.2008

1) Die Funktion $f(x) = \frac{1}{2} x^3 + x$ wird in P(2, y) von einer Funktion $g(x)= ax^2 + bx$ berührt.

a) Bestimme die Funktionsgleichung von g(x)!
b) Bestimme Lage und Art der Extremwerte und allfällige Wendepunkte beider Funktionen und skizziere ihren Verlauf!

2) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

a) Bestimme den Definitionsbereich der Funktion! Besitzt f(x) Polstellen?
b) Führe eine vollständige Kurvendiskussion durch (Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte)!
c) Skizziere den Verlauf der Funktion!

3) Ein zylinderförmiges, oben offenes Gefäß soll eine dreifach verstärkte Bodenplatte haben und 1 Liter fassen. Welche Abmessungen muss das Gefäß haben, wenn zu seiner Herstellung möglichst wenig Material benötigt werden soll? Erkläre ausführlich die Vorgangsweise bei der Lösung dieser Aufgabe!

4) Löse die folgende Gleichung in der Menge der komplexen Zahlen!

$$\frac{1+2i}{2-i} \cdot z = \frac{i}{1-i}$$

[1) a) 3P. b) 5P. 2) a) 1P. b) 5P. c) 2P. 3) 6P. 4) 2P.]

2. Schularbeit

7C / Gruppe B 11.3.2008

1) Die Funktion $f(x) = \frac{1}{3} x^3 + x$ wird in P(3, y) von einer Funktion $g(x)= ax^2 + bx$ berührt.

a) Bestimme die Funktionsgleichung von g(x)!
b) Bestimme Lage und Art der Extremwerte und allfällige Wendepunkte beider Funktionen und skizziere ihren Verlauf!

2) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$

a) Bestimme den Definitionsbereich der Funktion! Besitzt f(x) Polstellen?
b) Führe eine vollständige Kurvendiskussion durch (Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte)!
c) Skizziere den Verlauf der Funktion!

3) Ein zylinderförmiges, oben offenes Gefäß soll dreifach verstärkte Seitenwände haben und 1 Liter fassen. Welche Abmessungen muss das Gefäß haben, wenn zu seiner Herstellung möglichst wenig Material benötigt werden soll? Erkläre ausführlich die Vorgangsweise bei der Lösung dieser Aufgabe!

4) Löse die folgende Gleichung in der Menge der komplexen Zahlen!

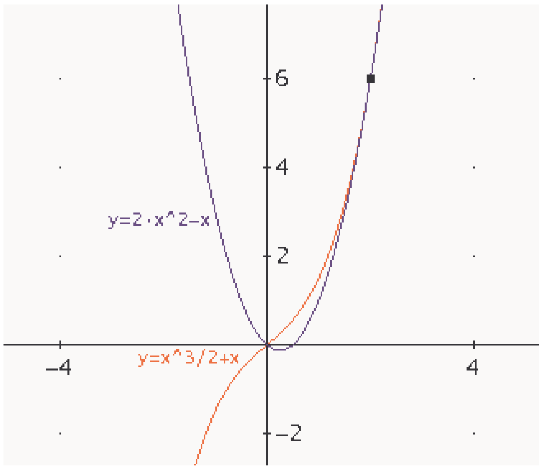
$$\frac{1-2i}{2+i} \cdot z = \frac{i}{1-i}$$

[1) a) 3P. b) 5P. 2) a) 1P. b) 5P. c) 2P. 3) 6P. 4) 2P.]

Lösungen Gruppe A:

1) $f(x) = {}^1/_2 x^3 + x$. Durch Einsetzen erhält man unmittelbar P(2, 6).
Für f '(x) gilt: $f'(x) = {}^3/_2\, x^2 + 1$. $f'(2) = 7$. Dies ist die Steigung der Tangente in P. Es gilt nun:
$g(2) = 6$ und $g'(2) = 7$. Daraus ermittelt man die beiden Bedingungen:
$4a + 2b = 6$ und $4a + b = 7$. Die Lösungen des Gleichungssystems lauten: a=2 und b= -1.
Die Funktion g(x) lautet daher: $g(x) = 2x^2 - x$.

Kurvendiskussion:
Extremwerte von f(x): $f'(x) = {}^3/_2 x^2 + 1 = 0$, f(x) hat keine Extremwerte! $f''(x) = 3x = 0$, daher hat f(x) in W(0, 0) einen Wendepunkt.
$g'(x) = 4x - 1 = 0$ hat als Lösung $x = {}^1/_4$.
Wegen $g''(x) = 4 > 0$ ist $E({}^1/_4, -{}^1/_8)$ lokales Minimum.
Die folgende Graphik zeigt den Verlauf beider Funktionen:



2) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

Der Definitionsbereich dieser Funktion ist R. f(x) hat keine Polstellen!
Nullstellen: f(x) hat in N(0, 0) eine Nullstelle:

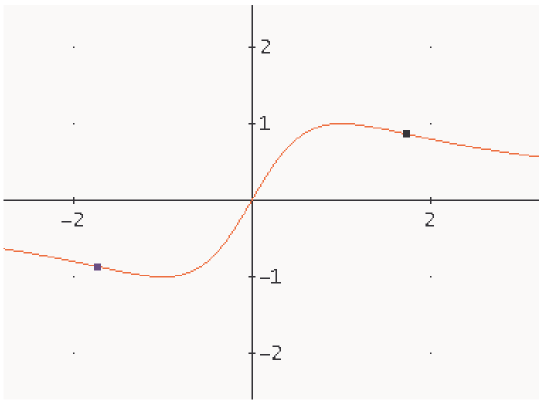
Für f '(x) berechnet man: $f'(x) = \dfrac{2\cdot(x^2+1) - 2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} = 0$

und daraus $x_1=1$ und $x_2= -1$
Für f ''(x) berechnet man:

$$f''(x) = \frac{-4x\cdot(x^2+1)^2 - (-2x^2+2)\cdot 2\cdot(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{-4x\cdot(x^2+1) - 4x\cdot(-2x^2+2)}{(x^2+1)^3} = \frac{-4x^3 - 4x + 8x^3 - 8x}{(x^2+1)^3} =$$

$$= \frac{4x^3 - 12x}{(x^2+1)^3} = 0$$

Daraus ergibt sich: $4x^3 - 12x = 0$ und weiter $x_1= 0$ und ebenso $x_2= \sqrt{3}$ und $x_3= -\sqrt{3}$
f(x) besitzt drei Wendepunkte, nämlich bei $W_1(0, 0)$, $W_2(\sqrt{3}, \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\ )$, $W_3(-\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\ )$.
Wegen $f''(1)=-8<0$ und $f''(-1)=8>0$ ist $E_1(-1, -1)$ lokales Minimum, $E_2(1, 1)$ lokales Maximum.



3) Man formuliert als Hauptbedingung:
$O(r, h) = 3\cdot r^2\cdot\pi + 2\cdot r\cdot\pi\cdot h$ soll minimal werden unter der Nebenbedingung:
$V = r^2\cdot\pi\cdot h = 1000$. Aus der Nebenbedingung berechnet man $h = \dfrac{1000}{r^2\cdot\pi}$. Setzt man diesen Term in die Hauptbedingung ein, erhält man:

$O(r) = 3r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r\pi \cdot \frac{1000}{r^2 \cdot \pi} = 3r^2 \cdot \pi + \frac{2000}{r}$.

Bildet man die erste Ableitung, erhält man:

$O'(r) = 6r \cdot \pi - \frac{2000}{r^2} = 0$.

Daraus erhält man: $6r^3 \cdot \pi = 2000$ und weiter: $r = \sqrt[3]{\frac{1000}{3 \cdot \pi}}$ =4,734cm. Durch Rückeinsetzen in die Nebenbedingung erhält man: h=14,20cm. Genaugenommen gilt: h=3r.

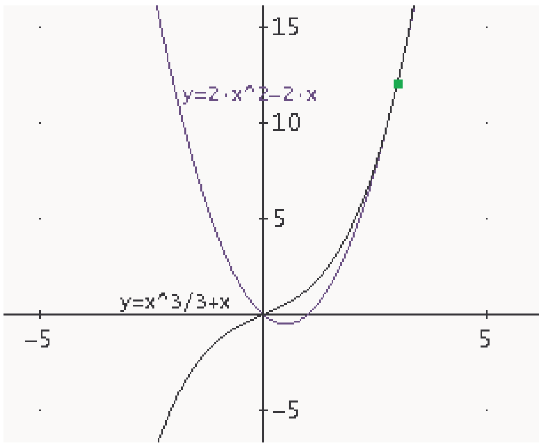
4) $\frac{1+2i}{2-i} \cdot z = \frac{i}{1-i}$

Es gilt:

$\frac{1+2i}{2-i} = i$ und $\frac{i}{1-i} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$, daher gilt: $iz = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ und z=$\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$.

Lösungen Gruppe B:

1) f(x) = $\frac{1}{3}x^3 + x$. Durch Einsetzen erhält man unmittelbar P(3, 12).
Für f '(x) gilt: f '(x) = $x^2 + 1$. f '(3) = 10. Dies ist die Steigung der Tangente in P. Es gilt nun: g(3) = 12 und g'(3) = 10. Daraus ermittelt man die beiden Bedingungen:
9a + 3b = 12 und 6a + b = 10. Die Lösungen des Gleichungssystems lauten: a=2 und b= -2.
Die Funktion g(x) lautet daher: g(x) = $2x^2 - 2x$.
Kurvendiskussion:
Extremwerte von f(x): f '(x) = $x^2 + 1$ =0, f(x) hat keine Extremwerte. f ''(x) = 2x = 0, f(x) hat daher in W(0, 0) einen Wendepunkt.
g'(x)= 4x - 2 = 0 hat als Lösung x=$\frac{1}{2}$.
Wegen g''(x)= 4>0 hat g(x) in E($\frac{1}{2}$, -$\frac{1}{2}$) ein lokales Minimum.
Die folgende Graphik zeigt den Verlauf beider Funktionen:



2) $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$

Der Definitionsbereich dieser Funktion ist R. f(x) hat keine Polstellen!
Nullstellen: f(x) hat in N(0, 0) eine Nullstelle:
Für f '(x) berechnet man: $f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+4) - 2x \cdot x}{(x^2+4)^2} = \frac{-x^2+4}{(x^2+4)^2} = 0$

und daraus x_1=2 und x_2= -2
Für f ''(x) berechnet man:

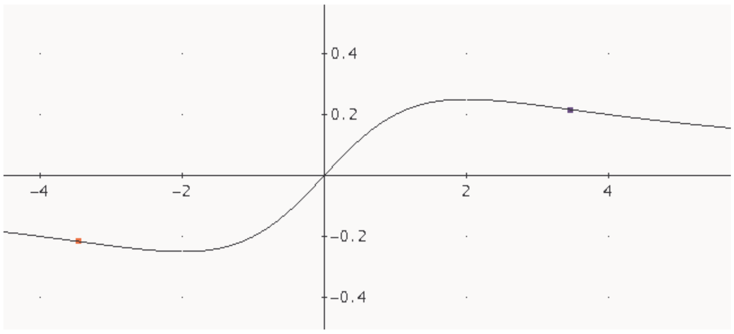
$$f''(x) = \frac{-2x \cdot (x^2+4)^2 - (-x^2+4) \cdot 2 \cdot (x^2+4) \cdot 2x}{(x^2+4)^4} = \frac{-2x \cdot (x^2+4) - 4x \cdot (-x^2+4)}{(x^2+4)^3} = \frac{-2x^3 - 8x + 4x^3 - 16x}{(x^2+4)^3} =$$

$$= \frac{2x^3 - 24x}{(x^2+4)^3} = 0$$

Daraus ergibt sich: $2x^3 - 24x = 0$ und weiter x_1= 0 und ebenso x_2= $2 \cdot \sqrt{3}$ und x_3= $-2 \cdot \sqrt{3}$

f(x) besitzt drei Wendepunkte, nämlich bei $W_1(0, 0)$, $W_2\left(2\cdot\sqrt{3}, \frac{1}{8}\cdot\sqrt{3}\right)$, $W_3\left(-2\cdot\sqrt{3}, -\frac{1}{8}\cdot\sqrt{3}\right)$.

Wegen $f''(2)=-\frac{1}{16}<0$ und $f''(-2)=\frac{1}{16}>0$ ist $E_1(-2, -\frac{1}{4})$ lokales Minimum, $E_2(2, \frac{1}{4})$ lokales Maximum.



3) Man formuliert als Hauptbedingung:
$O(r, h) = r^2\cdot\pi + 6\cdot r\cdot \pi\cdot h$ soll minimal werden unter der Nebenbedingung:
$V=r^2\cdot \pi\cdot h=1000$. Aus der Nebenbedingung berechnet man $h=\frac{1000}{r^2\cdot\pi}$. Setzt man diesen Term in die Hauptbedingung ein, erhält man:

$$O(r)=r^2\cdot\pi+6\cdot r\pi\cdot\frac{1000}{r^2\cdot\pi}=r^2\cdot\pi+\frac{6000}{r}.$$

Bildet man die erste Ableitung, erhält man:

$$O'(r)=2r\cdot\pi-\frac{6000}{r^2}=0.$$

Daraus erhält man: $2r^3\cdot\pi = 6000$ und weiter: $r=\sqrt[3]{\frac{3000}{\pi}}$ =9,847cm. Durch Rückeinsetzen in die Nebenbedingung erhält man: h=3,282cm. Genaugenommen gilt: r=3h.

4) $\frac{1-2i}{2+i}\cdot z=\frac{i}{1-i}$

Es gilt:

$\frac{1-2i}{2+i}=-i$ und $\frac{i}{1-i}=-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$, daher gilt: $-iz=-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$ und $z=-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$.