3. Schularbeit - Wiederholung

7C 5. 6. 2007

1) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x^2 + a}{x^2 + 1}$.

a) Zeige, dass diese Funktion stets an der Stelle x=0 eine waagrechte Tangente hat!
b) Bestimme die Konstante a so, dass die Funktion im Punkt E(0, 2) einen Extremwert hat!
c) Zeige, dass dieser Extremwert E ein lokales Maximum ist!
d) Bestimme die Wendepunkte der Funktion $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$ und skizziere ihren Verlauf!

2) Eine Ellipse und eine Hyperbel haben denselben Brennpunkt $F_1(6, 0)$ und gehen durch den Punkt P(5, 2).

a) Bestimme die Gleichungen der beiden Kurven!
b) Bestimme die Gleichungen der Tangenten an beide Kurven im Schnittpunkt!
c) Zeige, dass die beiden Tangenten im Schnittpunkt aufeinander normal stehen!

3) Ein Kreis, der seinen Mittelpunkt auf der y-Achse hat, wird in P(4, y) von der Funktion $f(x) = {}^1/_8\, x^3 – x^2$ berührt.

a) Bestimme die Gleichung dieses Kreises!
b) Bestimme die Gleichung der gemeinsamen Tangente in P!

[1) a) 3P. b)1P. c) 2P. d) 4P. 2) a) 6P. b) 2P. c) 1P. 3) a) 4P. b) 1P.]

3. Schularbeit - Wiederholung

7C 5. 6. 2007

1) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x^2 + a}{x^2 + 1}$.

a) Zeige, dass diese Funktion stets an der Stelle x=0 eine waagrechte Tangente hat!
b) Bestimme die Konstante a so, dass die Funktion im Punkt E(0, 2) einen Extremwert hat!
c) Zeige, dass dieser Extremwert E ein lokales Maximum ist!
d) Bestimme die Wendepunkte der Funktion $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$ und skizziere ihren Verlauf!

2) Eine Ellipse und eine Hyperbel haben denselben Brennpunkt $F_1(6, 0)$ und gehen durch den Punkt P(5, 2).

a) Bestimme die Gleichungen der beiden Kurven!
b) Bestimme die Gleichungen der Tangenten an beide Kurven im Schnittpunkt!
c) Zeige, dass die beiden Tangenten im Schnittpunkt aufeinander normal stehen!

3) Ein Kreis, der seinen Mittelpunkt auf der y-Achse hat, wird in P(4, y) von der Funktion $f(x) = {}^1/_8\, x^3 – x^2$ berührt.

a) Bestimme die Gleichung dieses Kreises!
b) Bestimme die Gleichung der gemeinsamen Tangente in P!

[1) a) 3P. b)1P. c) 2P. d) 4P. 2) a) 6P. b) 2P. c) 1P. 3) a) 4P. b) 1P.]

Lösungen:

1) a)

Es gilt: $f'(x)=\frac{2x\cdot(x^2+1)-2x\cdot(x^2+a)}{(x^2+1)^2}=\frac{2x-2ax}{(x^2+1)^2}=0$. Daraus folgt: 2x·(1 - a)=0 und x=0.

Alle Funktionen dieses Typs haben daher an de Stelle x=0 eine wagrechte Tangente!

b) Einen Extremwert an der Stelle E(0, 2) erhält man genau dann, wenn a=2.

c) Man bestimmt:

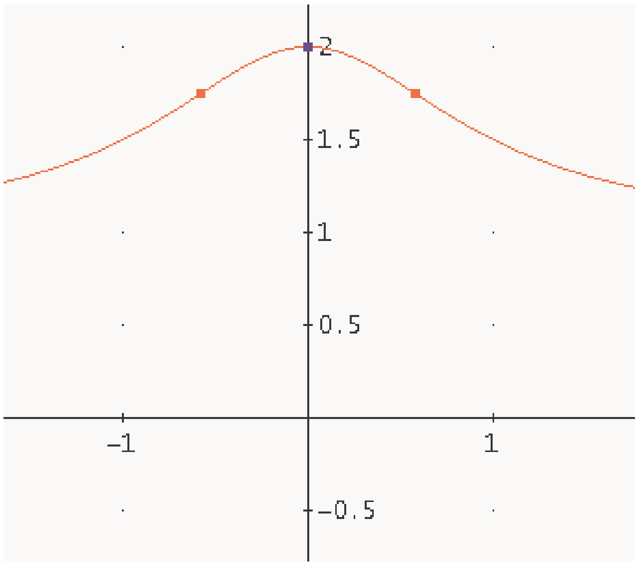
$$f''(x)=\frac{(2-2a)\cdot(x^2+1)^2-2\cdot(x^2+1)\cdot 2x\cdot x\cdot(2-2a)}{(x^2+1)^4}=\frac{(2-2a)\cdot(x^2+1)-4x^2\cdot(2-2a)}{(x^2+1)^3}=$$

$$\frac{(2-2a)\cdot(-3x^2+1)}{(x^2+1)^3}$$

f ’’(0) = 2-2a,d.h. für a>1 liegt ein lokales Maximum (wie im gegebenen Fall) vor, für 0<a<1 liegt ein lokales Minimum vor, für a=0 besitzt die Funktion bei x=0 einen Wendepunkt!

d) Die Wendepunkte kann man unmittelbar durch Nullsetzen von f ’’(x) aus c) erhalten.

Es ergeben sich: $x_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$ und $x_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. Die Wendepunkte liegen daher bei: $W_1(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{7}{4})$ und $W_2(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{7}{4})$. Die folgende Skizze zeigt den Verlauf der Funktion:



2)a) Es gilt für beide Kurven: $e^2=36$.

Für die Ellipse gilt: $a^2 - b^2 = 36$ und $25b^2 + 4a^2 = a^2b^2$.

Einsetzen ergibt: $25b^2 + 4(36 + b^2) = (36 + b^2)b^2$ und weiter:

$25b^2 + 144 + 4b^2 - 36b^2 - b^4 = 0$

Daraus erhält man: $a^2 = 45$ und $b^2=9$. Die Ellipse hat die Gleichung:

$9x^2 + 45y^2 = 405$ oder: $x^2 + 5y^2 = 45$.

Für die Hyperbel gilt $a^2 + b^2 = 36$ und $25b^2 - 4a^2 = a^2b^2$.

Einsetzen ergibt hier:

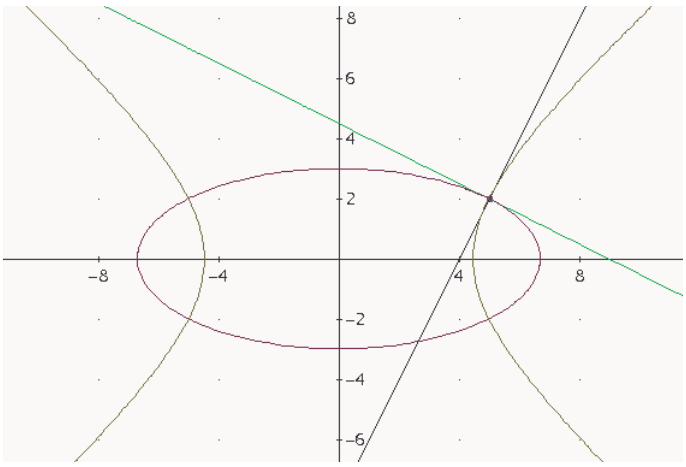
$25b^2 - 4(36 - b^2) = (36 - b^2)b^2$ und weiter:

$25b^2 - 144 + 4b^2 - 36b^2 + b^4 = 0$

Daraus erhält man: $a^2 = 20$ und $b^2=16$. Die Hyperbel hat die Gleichung:

$16x^2 - 20y^2 = 320$ oder: $4x^2 - 5y^2 = 80$

b) Die Tangentengleichung in P an die Ellipse lautet : t_{ell}: x + 2y = 9, die Tangentengleichung an die Hyperbel in P: t_{hyp}: 2x – y = 8



c) Es ist offensichtlich, dass die beiden Tangenten aufeinander normal stehen, da t_{ell} den Normalvektor n=(1, 2) hat und t_{hyp} den Normalvektor n_1=(2, -1) hat! Die nebenstehende Skizze veranschaulicht die Lage der beiden Kurven sowie der Tangenten im Schnittpunkt:

3) Für den Mittelpunkt des Kreises gilt: M(0, n). Der Punkt P lautet (4, - 8). Es gilt: $f'(x) = \frac{3}{8} x^2 - 2x$ und $f'(4) = -2$, die Tangente an f(x) in P lautet daher: t: y=-2x + d. Setzt man P ein, erhält man: d= 0. Der Kreismittelpunkt muss auf einer Normalen auf t liegen. Eine derartige Normale hat die Gleichung: n: -x + 2y = -20. Schneidet man n mit der y-Achse (d.h. x=0) erhält man y=-10. Der Mittelpunkt des Kreises liegt daher bei M(0, -10). Den Kreisradius bestimmt man aus: r=|MP| = $\sqrt{20}$. Die Gleichung des Kreises lautet daher:
k: $x^2 + (y + 10)^2 = 20$. Die Gleichung der gemeinsamen Tangente in P : t : 2x + y = 0. Diese Tangente geht durch den Koordinatenursprung! Die folgende Skizze veranschaulicht die Lage des Kreises, der Funktion sowie der gemeinsamen Tangente.