

2. Schularbeit

7C

6.3.2007

1) Richtig oder falsch? Bewerte die folgenden Aussagen und begründe (eventuell mit Hilfe einer Skizze)!

- a) Eine Funktion des Typs $h(x) = px^3 + qx + r$ besitzt immer einen Wendepunkt!
- b) Die Funktion $f(x) = x^3 - x$ ist in $P(2, y)$ rechtsgekrümmt!
- c) $E(1, -1)$ ist lokales Minimum der Funktion $f(x) = x^4 - 2x^2$!
- d) Jede Funktion der Form $f(x) = x^5 - ax^3$ hat zumindest einen Extremwert!

2) Die Funktion $f(x) = x^2 + 3x$ wird in $P(-1, y)$ von einer Funktion $g(x) = ax^3 + bx^2$ berührt.

- a) Bestimme die Funktionsgleichung von $g(x)$!
- b) Bestimme Extremwerte und Wendepunkt der Funktion $g(x)$ und skizziere den Verlauf beider Kurven!

3) Eine **oben offene** zylinderförmige Regentonne soll 250 Liter fassen. Welche Abmessungen muss die Tonne haben, damit zu ihrer Herstellung möglichst wenig Blech benötigt wird?

4) Löse die folgende Gleichung in der Menge der komplexen Zahlen!

$$\frac{z}{1-i} - i = \frac{1+2iz}{i+1}$$

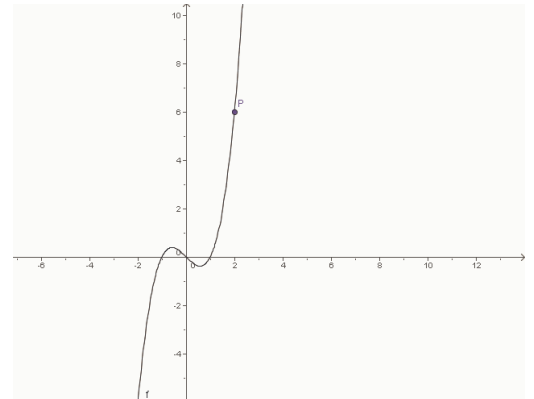
[1) a)1P. b)2P. c) 2P. d) 2P. 2) a) 3P. b) 5P. 3) 4P. 4) 3P.]

Lösungen:

1)

a) $h(x) = px^3 + qx + r$ hat als 2. Ableitung die Funktion: $h''(x) = 6px$, d.h., wenn $p \neq 0$ hat die Funktion stets bei $x=0$, d.h. im Punkt $W(0, r)$ einen Wendepunkt!

b) Die Funktion $f(x) = x^3 - x$ enthält den Punkt $P(2, 6)$. Für die Krümmung bestimmt man die zweite Ableitung, $f''(x) = 6x$. Es gilt: $f''(2) = 12 > 0$, daher ist $f(x)$ im Punkt P nicht rechtsgekrümmt, sondern linksgekrümmt! Die folgende Skizze veranschaulicht die Lage der Kurve!



c) $f(x) = x^4 - 2x^2$ hat als erste Ableitung $f'(x) = 4x^3 - 4x$. Daraus bestimmt man die Lösungen $x_1=0$, $x_2=1$ und $x_3=-1$. Wegen $f''(x) = 12x^2 - 4$ und $f''(1) = 8 > 0$ ist $E(1, -1)$ lokales Minimum der Funktion $f(x)$!

d) Jede Funktion der Form $f(x) = x^5 - ax^3$ hat die erste Ableitung $f'(x) = 5x^4 - 3ax^2$. Setzt man diese Ableitung gleich 0, ergibt sich in jedem Fall die Doppellösung $x_1=0$. Der restliche Teil der Gleichung liefert $5x^2 - 3a = 0$. Daraus

entnimmt man die Lösungen $x_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{3a}{5}}$. Dies sind reelle

Lösungen für $a > 0$. Für $a < 0$ gibt es keine reellen Lösungen, daher kann es auch keine Extremwerte geben! Wegen $f''(x) = 20x^3 - 6ax$ gilt $f''(0) = 0$. Bei $x=0$ kann daher kein Extremwert vorliegen. Die

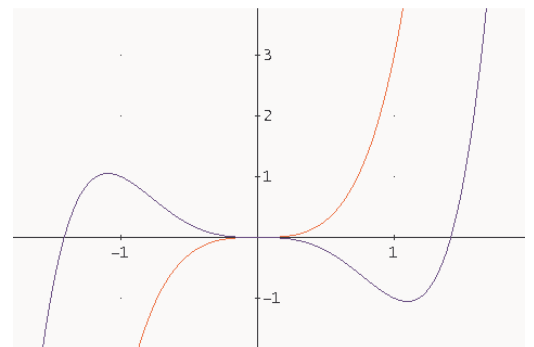
zweite Ableitung bei $x_2 = \sqrt{\frac{3a}{5}}$ liefert einen positiven Wert.

Daher liegt bei x_2 ein lokales Minimum vor! Die zweite

Ableitung bei $x_3 = -\sqrt{\frac{3a}{5}}$ liefert einen negativen Wert. Daher

liegt bei x_3 ein lokales Maximum vor. Die Funktion hat also für $a > 0$ stets zwei Extremwerte, für $a < 0$ keine Extremwerte!

Die folgende Skizze veranschaulicht zwei Funktionen dieses Typs, nämlich $f(x) = x^5 - 2x^3$ („blau“) und $g(x) = x^5 + 2x^3$ („rot“).



Nebenbemerkung: Beide Funktionen haben, wie aus Zeichnung und Rechnung ersichtlich ist, bei $W(0, 0)$ einen Wendepunkt!

2)

a) Die Funktion $f(x) = x^2 + 3x$ geht durch $P(-1, -2)$. $g(x)$ muss daher diesen Punkt ebenfalls enthalten. Da die Funktionen einander in P berühren, hat $g(x) = ax^3 + bx^2$ bei $x=-1$ dieselbe Steigung wie $f(x)$.

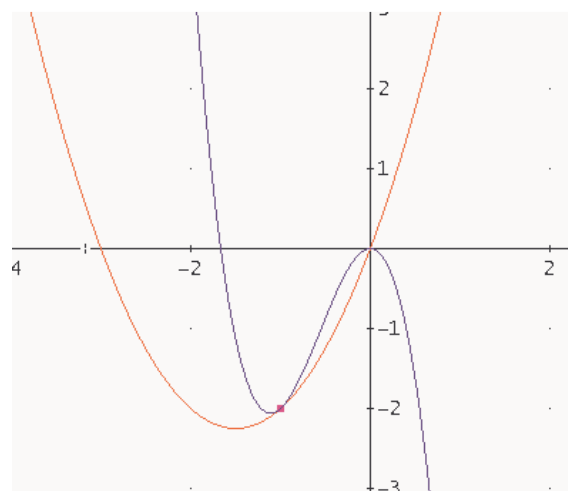
Man bestimmt $f'(x) = 2x + 3$ und $f'(-1) = 1$. Daher gilt $g'(-1) = 1$ und $g(-1) = -2$.

Daraus bestimmt man folgende Gleichungen:

$-a + b = -2$ und $3a - 2b = 1$. Daraus berechnet man $a = -3$ und $b = -5$, $g(x)$ hat daher die Gleichung: $g(x) = -3x^3 - 5x^2$. Die folgende Skizze veranschaulicht die Lage der beiden Kurven:

b) Für die Extremwerte von $g(x)$ gilt:

$E_1(-\frac{10}{9}, -\frac{500}{243})$ und $E_2(0, 0)$. Wegen $g''(x) = -18x - 10$ ist E_1 lokales Minimum, E_2 lokales Maximum. Bei $W(-\frac{5}{9}, -\frac{250}{243})$ liegt ein Wendepunkt vor!



3) Für die oben offene Regentonnen gilt die Hauptbedingung:

$O(r, h) = r^2\pi + 2r\pi h$. Die Nebenbedingung

lautet: $V(r, h) = r^2 \pi h = 250$. Setzt man

$h = \frac{250}{r^2 \pi}$ in die Hauptbedingung ein, erhält man $O(r) = r^2 \pi + 2r \pi \frac{250}{r^2 \pi} = r^2 \pi + \frac{500}{r}$. Leitet man nach

r ab, erhält man: $O'(r) = 2r \pi - \frac{500}{r^2} = 0$ und daraus $r = \sqrt[3]{\frac{500}{2\pi}} = 4,3 \text{ dm}$. Entsprechend ist die Höhe

$h = 4,3 \text{ dm}$. Radius und Höhe sind also identisch!

4) $\frac{z}{1-i} - i = \frac{1+2iz}{i+1}$. Man formt um, indem man auf gemeinsamen Nenner bringt:

$$z(i+1) - i(1-i)(i+1) = (1+2iz)(i+1)$$

$$iz + z - i(i+1+1-i) = 1 + 2iz - i + 2z$$

$$iz + z - 2i = 1 + 2iz - i + 2z$$

$$-iz - z = 1 + i$$

$$-z(1+i) = 1+i$$

$$z = -1$$