3. Schularbeit

6C / Gruppe A 1. 6. 2007

1) a) Ermittle die Normalvektorform der Gleichung der Ebene, die durch den Punkt P(3, 2, -1) und die Gerade g: X=(2, 1, 0)+ s · (1, 2, 0) festgelegt wird!
   b) Bestimme die gegenseitige Lage der beiden Geraden
   g: X=(2, 1, 0) + s · (3, -1, -1) und h: X=(-1, 2, 1) + t·(4, 1,-1)!
   c) Erkläre, wann 2 Ebenen zueinander parallel liegen!

2) Gegeben ist die Zahlenfolge $a_n = \frac{4n+1}{2n}$
   a) Berechne die ersten 4 Folgenwerte und stelle eine Vermutung über die Monotonie der Folge auf!
   b) Beweise die vermutete Monotonie!
   c) Bestimme den Grenzwert dieser Folge!
   d) Ab welchem Folgenwert n_ε liegen fast alle Folgenwerte innerhalb der Umgebung $\varepsilon = {}^{1}/_{1000}$ des Grenzwerts?

3) a) Erkläre, weshalb die Folge $a_n = \frac{4n^3+n}{2n} + 1$ divergent ist!
   b) Skizziere den Verlauf der Funktion f(x) = $\frac{4}{x-2}$ möglichst genau und beschreibe ihr Verhalten in der Umgebung von x=2!

[1) a)4P. b)3P. c)1P. 2)a)1P. b)2P. c) 1P. d) 2P. 3)a) 1P. b) 3P.]

3. Schularbeit

6C / Gruppe B 1. 6.2007

1) a) Ermittle die Normalvektorform der Gleichung der Ebene, die durch den Punkt P(3, -2, -1) und die Gerade g: X=(2, 1, 0)+ s · (-1, 2, 0) festgelegt wird!
   b) Bestimme die gegenseitige Lage der beiden Geraden
   g: X=(2, 0, 1) + s · (3, -1, -1) und h: X=(-1, 1, 2) + t·(4, 1,-1)!
   c) Erkläre, wann 2 Ebenen zusammenfallend sind!

2) Gegeben ist die Zahlenfolge $a_n = \frac{4n-1}{2n}$
   a) Berechne die ersten 4 Folgenwerte und stelle eine Vermutung über die Monotonie der Folge auf!
   b) Beweise die vermutete Monotonie!
   c) Bestimme den Grenzwert dieser Folge!
   d) Ab welchem Folgenwert n_ε liegen fast alle Folgenwerte innerhalb der Umgebung $\varepsilon = {}^{1}/_{1000}$ des Grenzwerts?

3) a) Erkläre, weshalb die Folge $a_n = \frac{4n^3-n}{2n^2} - 1$ divergent ist!
   b) Skizziere den Verlauf der Funktion f(x) = $\frac{2}{x+3}$ möglichst genau und beschreibe ihr Verhalten in der Umgebung von x= -3!

[1) a)4P. b)3P. c)1P. 2)a)1P. b)2P. c) 1P. d) 2P. 3)a) 1P. b) 3P.]

Lösungen:
Gruppe A:

1) a) Die Ebenengleichung in Parameterform lautet:
X=(2, 1, 0) + s · (1, 2, 0) + t · (1, 1, -1). Daraus berechnet man:
x = 2 + s + t
y = 1 + 2s + t
z = -t

Subtrahiert man die zweite von der ersten Gleichung, erhält man:
x – y = 1 – s.
Addiert man erste und dritte Gleichung, erhält man x + z = 2 + s
Nun eliminiert man noch aus diesen beiden Gleichungen die Variable s:
2x – y + z = 3.

b) g: X=(2,1, 0) + s · (3, -1, -1) und h: X=(-1, 2, 1) + t·(4, 1, -1)
Die beiden Geraden können nicht parallel und damit auch nicht zusammenfallend liegen, da ihre Richtungsvektoren kein Vielfaches voneinander sind.
Es kommt daher nur ein Schnittpunkt oder windschiefe Lage in Frage:
Man schneidet g und h:
2 + 3s = -1 + 4t
1 – s = 2 + t
-s = 1 – t

Aus den ersten beiden Gleichungen eliminiert man z. B. s und erhält: t=0 sowie s= -1. Diese Werte erfülle n auch die dritte Gleichung, es liegt daher ein Schnittpunkt bei S(-1, 2, 1) vor.

c) Zwei Ebenen liegen genau dann zueinander parallel, wenn sie denselben oder vielfachen Normalvektor haben, aber keinen gemeinsamen Punkt, d.h. in der Normalvektorform der Ebenengleichung ist der Normalvektor gleich oder ein Vielfaches, die Konstante jedoch nicht.

2) Gegeben ist die Zahlenfolge $a_n = \frac{4n+1}{2n}$

a) Für die ersten 4 Folgenwerte berechnet man: $^5/_2$, $^9/_4$, $^{13}/_6$, $^{17}/_8$, ...

b) Vermutung: streng monoton fallend:
Beweis: Es muss $a_n > a_{n+1}$ für alle natürlichen Zahlen n gelten, d.h.
$\frac{4n+1}{2n} > \frac{4n+4+1}{2n+2}$, d.h. $\frac{4n+1}{2n} > \frac{4n+5}{2n+2}$ und weiter: $8n^2+10n+2 > 8n^2+10n$ und damit 2>0. a_n ist daher streng monoton fallend.

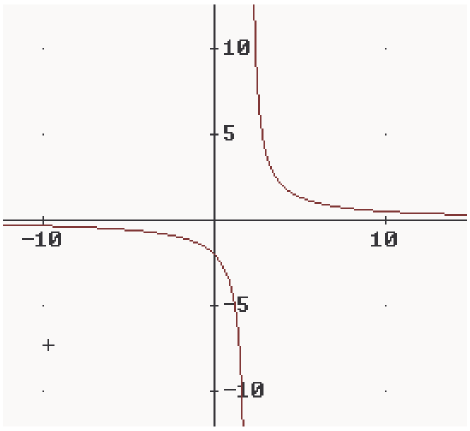
c) Für den Grenzwert der Folge berechnet man aufgrund der Grenzwertsätze (Grad im Zähler gleich dem Grad im Nenner):

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot\left(4+\frac{1}{n}\right)}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(4+\frac{1}{n}\right)}{2} = 2$$

d) Den Index n_ε bestimmt man aus:
$\left|\frac{4n+1}{2n}-2\right| < \frac{1}{1000}$ und daher: $\left|\frac{4n+1-4n}{2n}\right| < \frac{1}{1000}$, daraus: $\left|\frac{1}{2n}\right| < \frac{1}{1000}$ oder 2n>1000 oder n>500. Ab dem 501. Folgenwert liegen daher alle Folgenwerte in der $^1/_{1000}$ – Umgebung des Grenzwerts.

3) a) $a_n = \frac{4n^3+n}{2n}+1$. Diese Folge ist divergent aufgrund der Grenzwertsätze, da der Grad im Zähler größer ist als der Grad im Nenner, die additive Konstante 1 beeinflusst das Grenzwertverhalten nicht!

b) f(x) = $\frac{4}{x-2}$. Die Funktion besitzt bei x=2 eine Polstelle mit vertikaler Asymptote. Bestimmt man die einseitigen Grenzwerte bei x=2, erhält man: $\lim_{x\to 2^-} \frac{4}{x-2} = -\infty$, da der Nenner negativ (und sehr klein) wird! In gleicher Weise gilt: $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{4}{x-2} = \infty$, da der Nenner positiv (und sehr klein) wird. Da f(x) für große x-Werte gegen 0 strebt, ist der Verlauf der Kurve klar. Er ist in der folgenden Skizze dargestellt:



Gruppe B:

1) a) Die Ebenengleichung in Parameterform lautet:

X=(2, 1, 0) + s · (-1, 2, 0) + t · (1, -3, -1). Daraus berechnet man:

$x = 2 - s + t$

$y = 1 + 2s - 3t$

$z = -t$

Multipliziert man die erste Gleichung mit 3 und addiert sie zur zweiten Gleichung, erhält man:
$3x + y = 7 - s$.
Addiert man erste und dritte Gleichung, erhält man:
$x + z = 2 - s$.
Subtrahiert man nun noch diese beiden Gleichungen voneinander, erhält man:
$2x + y - z = 5$.

b) g: X=(2, 0, 1) + s · (3, -1, -1) und h: X=(-1, 1, 2) + t·(4, 1, -1)!

Die beiden Geraden können nicht parallel und damit auch nicht zusammenfallend liegen, da ihre Richtungsvektoren kein Vielfaches voneinander sind.
Es kommt daher nur ein Schnittpunkt oder windschiefe Lage in Frage:
Man schneidet g und h:

$2 + 3s = -1 + 4t$

$-s = 1 + t$

$1 - s = 2 - t$

Aus den ersten beiden Gleichungen eliminiert man z. B. die Variable s und erhält:
$2 = 2 + 7t$ und daher t=0 und s= - 1. Diese Werte erfülle n auch die dritte Gleichung, es liegt daher ein Schnittpunkt bei S(-1, 1, 2) vor!

c) Zwei Ebenen sind genau dann zusammenfallend, wenn sie denselben oder vielfachen Normalvektor haben und unendlich viele gemeinsame Punkte, d.h. in der Normalvektorform der Ebenengleichung ist der Normalvektor gleich oder ein Vielfaches, ebenso die Konstante.

2) Gegeben ist die Zahlenfolge $a_n = \frac{4n-1}{2n}$

a) Für die ersten 4 Folgenwerte berechnet man: $^3/_2$, $^7/_4$, $^{11}/_6$, $^{15}/_8$, ...
b) Vermutung: streng monoton steigend:
Beweis: Es muss $a_n < a_{n+1}$ für alle natürlichen Zahlen n gelten, d.h.

$\frac{4n-1}{2n} < \frac{4n+4-1}{2n+2}$, d.h. $\frac{4n-1}{2n} < \frac{4n+3}{2n+2}$ und weiter: $8n^2 + 6n - 2 < 8n^2 + 6n$ und damit –2<0. a_n ist daher streng monoton steigend.

c) Für den Grenzwert der Folge berechnet man aufgrund der Grenzwertsätze (Grad im Zähler gleich dem Grad im Nenner):

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot \left(4 - \frac{1}{n}\right)}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(4 - \frac{1}{n}\right)}{2} = 2$$

d) Den Index n_ε bestimmt man aus:

$\left|\frac{4n-1}{2n} - 2\right| < \frac{1}{1000}$ und daher: $\left|\frac{4n-1-4n}{2n}\right| < \frac{1}{1000}$, daraus: $\left|\frac{-1}{2n}\right| < \frac{1}{1000}$ oder 2n>1000 oder n>500. Ab dem 501. Folgenwert liegen daher alle Folgenwerte in der $^{1}/_{1000}$ – Umgebung des Grenzwerts.

3) $a_n = \frac{4n^3 - n}{2n^2} - 1$. Diese Folge ist divergent aufgrund der Grenzwertsätze, da der Grad im Zähler größer ist als der Grad im Nenner, die additive Konstante -1 beeinflusst das Grenzwertverhalten nicht!

b) f(x) = $\frac{2}{x+3}$ Die Funktion besitzt bei x= -3 eine Polstelle mit vertikaler Asymptote. Bestimmt man die einseitigen Grenzwerte bei x= -3, erhält man: $\lim_{x\to -3^-} \frac{2}{x+3} = -\infty$, da der Nenner negativ (und sehr klein) wird! In gleicher Weise gilt: $\lim_{x\to -3^+} \frac{2}{x+3} = \infty$, da der Nenner positiv (und sehr klein) wird. Da f(x) für große x-Werte gegen 0 strebt, ist der Verlauf der Kurve klar. Er ist in der folgenden Skizze dargestellt: