

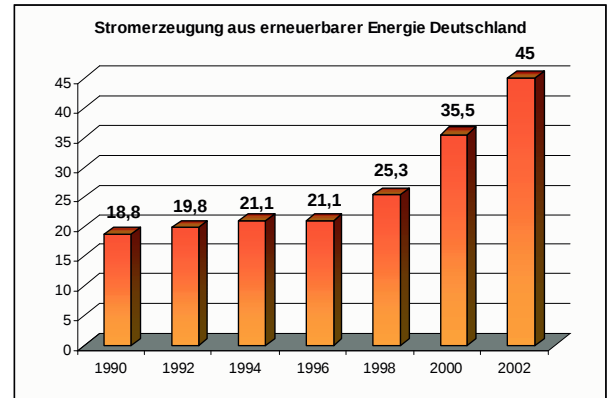
2. Schularbeit

6C / Gruppe A

28. 3. 2007

1) Die nebenstehende Graphik zeigt die Stromerzeugung aus erneuerbarer Energie in Deutschland im Zeitraum 1990 – 2002 (in Mrd. kWh). (Fischer Weltalmanach, 2005)

- Erstelle für den angegebenen Zeitraum sowohl ein lineares als auch ein nichtlineares Wachstumsmodell, formuliere die entsprechenden Modellgleichungen und vergleiche die Modellwerte mit den tatsächlichen Werten!
- Bestimme für beide Wachstumsmodelle Prognosewerte für 2008 und 2020!
- In welchem Jahr werden bei Annahme des nichtlinearen Modells mehr als 100 Mrd. kWh aus erneuerbarer Energie erzeugt werden?



- „Bei einer monatlichen Eigenleistung von nur 65.-€ können Sie nach nur 6 Jahren schon über mehr als 5000.-€ verfügen!“ Stimmt dieser Werbeslogan, wenn der jährliche Zinssatz derzeit etwa 3% beträgt?
 - Ein Playboy (15 Jahre) erbt 5 Millionen Euro, die bis zu seinem 18. Lebensjahr von der Hausbank verwaltet werden. Damit möchte er sich dann bis zu seinem 30. Geburtstag ein luxuriöses Leben gönnen. Welcher Betrag steht ihm monatlich zur Verfügung, wenn der jährliche Zinssatz 4,5% beträgt (monatliche Verzinsung!)?
- Das radioaktive Element Radium 226 hat eine Halbwertszeit von 1580 Jahren.
 - Formuliere dafür ein Zerfallsgesetz der Form: $B_t = B_0 \cdot q^t$. Wie groß ist die prozentuelle Abnahme?
 - Formuliere das Zerfallsgesetz in der Form $B_t = B_0 \cdot e^{at}$ und berechne damit, nach welcher Zeit die Konzentration auf weniger als 10% des Anfangswert zurückgegangen ist!

[1) a)5P. b)2P. c)1P. 2)a)3P. b)3P. 3)a) 2P. 4) 2P.]

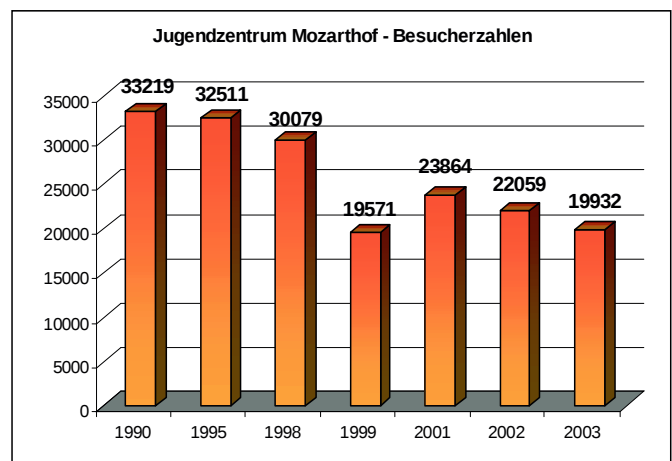
2. Schularbeit

6C / Gruppe B

28. 3.2007

1) Die Besucherzahlen des Jugendforums Mozarthof in Klagenfurt sind im Zeitraum 1990 – 2003 deutlich rückläufig. (Stat. Handbuch Klagenfurt, 2004)

- Erstelle für den angegebenen Zeitraum sowohl ein lineares als auch ein nichtlineares Wachstumsmodell, formuliere die entsprechenden Modellgleichungen und vergleiche die Modellwerte mit den tatsächlichen Werten!
- Bestimme für beide Wachstumsmodelle Prognosewerte für 2008 und 2020!
- In welchem Jahr werden bei Annahme des nichtlinearen Modells weniger als 15000 Besucher das Jugendzentrum besuchen?



- „10000.-€ im Handumdrehen - Sie zahlen monatlich 120.-€ 6 Jahre lang, wir zahlen den Rest!“ Stimmt dieser Werbeslogan, wenn der jährliche Zinssatz derzeit etwa 3,5% beträgt?
 - Nena Neureich hat für das geplante Studium ihrer Tochter Nina an deren 12. Geburtstag 5000.-€ angelegt. Über welchen Betrag kann Nina ab ihrem 18. Geburtstag monatlich verfügen, wenn der jährliche Zinssatz 4% beträgt und das Studium 5 Jahre dauern soll (monatliche Verzinsung!)?
- Das radioaktive Element Mesothorium hat eine Halbwertszeit von 6,7 Jahren.
 - Formuliere dafür ein Zerfallsgesetz der Form: $B_t = B_0 \cdot q^t$. Wie groß ist die prozentuelle Abnahme?
 - Formuliere das Zerfallsgesetz in der Form $B_t = B_0 \cdot e^{at}$ und berechne damit, nach welcher Zeit die Konzentration auf weniger als 10% des Anfangswert zurückgegangen ist!

[1) a)5P. b)2P. c)1P. 2)a)3P. b)3P. 3)a) 2P. 4) 2P.]

Lösungen:
Gruppe A:

1)a) Für das lineare Modell erhält man $k=2,183$ und damit die Modellgleichung: $B_t = B_0 + 2,183 \cdot t$ mit $B_0 = B_{1990}$.

Für das nichtlineare Modell erhält man $q = 1,0754$ und damit die Modellgleichung $B_t = B_0 \cdot 1,0754^t$ mit $B_0 = B_{1990}$.

b) Damit berechnet man die Modellwerte sowie die Prognosewerte:

Jahr	Mrd.kWh	lin Modell	nichtlin.Modell
1990		18,8	18,8
1992		19,8	21,7
1994		21,1	25,1
1996		21,1	29,1
1998		25,3	33,6
2000		35,5	38,9
2002		45	45,0
2008		58,1	69,6
2020		84,3	166,6

c) Dazu löst man die Gleichung: $B_0 \cdot 1,0754^t = 100$ mit $B_0 = 18,8$. und erhält $t=22,97$ Jahre oder ca. 23 Jahre, das heißt, etwa im Jahre 2013.

2)a) Bei Annahme monatlicher Verzinsung gilt für die angesparte Summe nach 6 Jahren (= 72 Monate):

$$S = 65 \cdot \frac{1,0025^{72} - 1}{0,0025} = 5120,66 \text{.-€} - \text{die Werbung stimmt also!} - \text{Zum Vergleich - bei jährlicher Verzinsung}$$

und jährlicher Zahlung des entsprechend höheren 12-fachen Betrags von 780.-€ wäre der Endbetrag ebenfalls schon höher als 5000.-€, nämlich 5045,36 €.

b) Die Erbschaft ist bis zu seinem 18 Geburtstag auf insgesamt: $5000000 \cdot 1,00375^{36} = 5721239,16\text{€}$ angewachsen (monatliche Verzinsung). Der monatliche Betrag r , über den er 12 Jahre lang verfügen kann, ergibt sich aus:

$$5721239,16 \cdot 1,00375^{144} - r \cdot \frac{1,00375^{144} - 1}{0,00375} = 0 \quad \text{Er liegt bei } r=51491,62\text{€ monatlich!}$$

Hinweis: Nimmt man für die ersten drei Jahre ganzjährige Verzinsung an, erhält man: $5000000 \cdot 1,045^3 = 5705830,63\text{€}$. Damit erhält man im 2. Teil der Rechnung einen monatlichen Betrag von $r = 51352,94\text{€}$.

3) a) Aus der Halbwertszeit berechnet man zunächst den Wachstumsfaktor q :

$$\frac{B_0}{2} = B_0 \cdot q^t. \text{ Daraus: } q^{1580} = \frac{1}{2} \text{ und daraus: } q=0,9995614, \text{ die prozentuelle Abnahme beträgt daher ca. } 0,05\%.$$

In der Form $B_t = B_0 \cdot e^{at}$ kann man das Wachstumsgesetz schreiben, wenn man $q=e^a$ setzt.

Es gilt dann: $a=-0,0004387$. Dementsprechend lautet das Wachstumsgesetz: $B_t = B_0 \cdot e^{-0,0004387 t}$.

Die Zeit, nach der die Konzentration auf weniger als 10% des Anfangswerts zurückgegangen ist, berechnet man aus der Gleichung: $\frac{1}{10} B_0 = B_0 \cdot e^{-0,0004387 t}$. Man erhält für $t=5248,65$ Jahre.

Gruppe B:

1) Für das lineare Modell erhält man $k=1022,07$ und damit die Modellgleichung: $B_t = B_0 - 1022,07 \cdot t$ mit $B_0 = B_{1990}$.

Für das nichtlineare Modell erhält man $q = 0,96147$ und damit die Modellgleichung $B_t = B_0 \cdot 0,96147^t$ mit

$$B_0 = B_{1990}.$$

b) Damit berechnet man die Modellwerte sowie die Prognosewerte:

Jugendzentrum Mozarthof Besucherzahlen

Jahr	Besucher	lin. Modell	nichtlin. Modell
1990	33219	33219	33219
1995	32511	28109	27294
1998	30079	25042	24259
1999	19571	24020	23324
2001	23864	21976	21562
2002	22059	20954	20731
2003	19932	19932	19932
2008		14822	16377
2020		2557	10220

c) Dazu löst man die Gleichung: $B_0 \cdot 0,96147^t = 15000$ mit $B_0 = 33219$. und erhält $t=20,235$ Jahre oder ca. 20 Jahre, das heißt, etwa im Jahre 2010.

2)a) Bei Annahme monatlicher Verzinsung gilt für die angesparte Summe nach 6 Jahren (= 72 Monate):

$$S = 120 \cdot \frac{1,002916^{72} - 1}{0,002916} = 9598,667.- \text{ €} - \text{ die Werbung stimmt also nicht! - Zum Vergleich - bei jährlicher}$$

Verzinsung und jährlicher Zahlung des entsprechend höheren 12-fachen Betrags von 1440.-€ wäre der Endbetrag noch niedriger, nämlich 9432,22 €.

b) Der Betrag ist bis zu ihrem 18 Geburtstag auf insgesamt: $5000 \cdot 1,0033^{72} = 6353,71\text{€}$ angewachsen (monatliche Verzinsung). Der monatliche Betrag r , über den sie 5 Jahre lang verfügen kann, ergibt sich aus:

$$6353,71 \cdot 1,0033^{60} - r \cdot \frac{1,0033^{60} - 1}{0,0033} = 0 \text{ Er liegt bei } r=117,01\text{€ monatlich!}$$

Hinweis: Nimmt man für die ersten sechs Jahre ganzjährige Verzinsung an, erhält man: $5000 \cdot 1,04^6 = 6326,6\text{€}$.

Im 2. Teil errechnet man daraus einen monatlichen Betrag von $r=116,51\text{€}$.

3) a) Aus der Halbwertszeit berechnet man zunächst den Wachstumsfaktor q :

$$\frac{B_0}{2} = B_0 \cdot q^t. \text{ Daraus: } q^{6,7} = \frac{1}{2} \text{ und daraus: } q=0,9017, \text{ die prozentuelle Abnahme beträgt daher ca. 10\%.}$$

In der Form $B_t = B_0 \cdot e^{at}$ kann man das Wachstumsgesetz schreiben, wenn man $q=e^a$ setzt.

Es gilt dann: $a=-0,10345$. Dementsprechend lautet das Wachstumsgesetz: $B_t = B_0 \cdot e^{-0,10345t}$.

Die Zeit, nach der die Konzentration auf weniger als 10% des Anfangswerts zurückgegangen ist, berechnet man aus der Gleichung: $\frac{1}{10} B_0 = B_0 \cdot e^{-0,10345t}$. Man erhält für $t=22,26$ Jahre.