3. Schularbeit

8C 22.3.2006

1) Gegeben ist das Dreieck A(-2, 0), B(-1, -7), C(5, 1)
   a) Zeige, dass P(-3, -3) auf dem Umkreis dieses Dreiecks liegt!
   b) Legt man durch P normale Geraden auf alle Dreiecksseiten (bzw. ihre Verlängerung), erhält man als Schnittpunkte mit diesen Geraden die Punkte S_1, S_2 und S_3. Zeige, dass diese drei Punkte auf einer Geraden (der so genannten Wallace Geraden) liegen!

2) Bei trockener Fahrbahn kann man für einen Mittelklassewagen eine Bremsverzögerung von ca. $a=6{,}5^{m}/_{s}{}^{2}$ annehmen, bei nasser Fahrbahn verringert sich dieser Wert (trotz ABS, etc.) auf ca. $a=4^{m}/_{s}{}^{2}$.

a) Herr B. Häbig fährt mit $54^{km}/_{h}$ auf der Landstraße, als er in ca. 40m Entfernung ein quer stehendes Fahrzeug erkennt. Bestimme Geschwindigkeits- und Wegfunktion für trockene bzw. nasse Fahrbahn! Kann er in beiden Fällen vor dem Hindernis anhalten, wenn man 1s Reaktionszeit annimmt?

b) Frau R. Asant befindet sich 60m hinter Herrn Häbig, als dieser das Hindernis erkennt. Sie fährt gerade mit $90^{km}/_{h}$, ist aber reaktionsschnell und bremst sofort. Kann sie bei nasser Fahrbahn rechtzeitig vor dem Hindernis anhalten?

3) Backe, backe Kuchen, … - diesmal ist Gugelhupf angesagt! Eine solche Gugelhupfform lässt sich vereinfacht durch eine um die negative y-Achse rotierende Ellipse beschreiben. Die Form hat an der Oberkante einen Durchmesser von 24cm, an der Unterkante einen Durchmesser von 16cm und ist 20cm hoch.

a) Bestimme die Gleichung der „Gugelhupfellipse“!

b) In der Mitte der Form befindet sich (wie üblich) ein zylinderförmiger Hohlteil mit dem Durchmesser von 4cm. Wieviel cm^3 Teig befindet sich in der Form, wenn sie bis 6cm unter den oberen Rand gefüllt ist? Veranschauliche die Situation durch eine möglichst genaue Skizze!

4) Erfahrungsgemäß gelingt es einem Zeitungsvertreter mit einer Wahrscheinlichkeit von 18%, seinen „Kunden“ ein Jahresabo aufzuschwatzen. Paul Plauderer muss morgen 8 Kunden besuchen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) er zumindest 2 Jahresabos verkauft?

b) ihn höchstens ein Kunde hinauswirft und nichts kauft?

c) mehr als 2 Kunden nichts kaufen?

d) Kuno Keiler, Pauls direkter Konkurrent, behauptet von sich, wesentlich besser im Verkauf zu sein. Zum Beweis führt er an, dass von seinen letzten 140 Kunden 34 ein Jahresabo gekauft hätten. Kann Kuno seine Behauptung mit 95% statistischer Sicherheit beweisen? Formuliere entsprechende Hypothesen und führe einen statistischen Test durch!

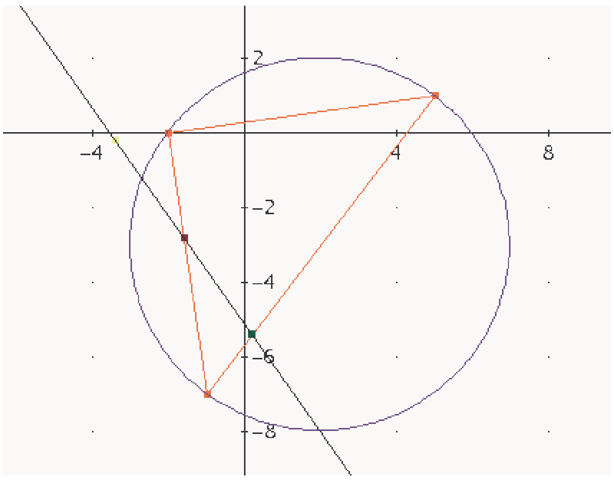
[1) a) 4P. b) 4P. 2)a) 4P. b) 4P. 3) a) 2P. b) 6P. 4) a) 1P. b) 1P. c) 1P. d) 5P.]

Lösungen:

1) a) Man bestimmt die Streckensymmetralen für 2 beliebige Seiten, z.B. mit $M_{AB}=(-{}^{3}/_{2}, -{}^{7}/_{2})$ und $AB=(1, -7)$ für die Seite c. s_c: x - 7y = 23.

Ebenso mit $M_{BC}=(2, -3)$ und $BC=(6, 8)$ für die Seite a. s_a: 6x + 8y = -12. Daraus bestimmt man den Umkreismittelpunkt U(2, -3). Für den Radius des Umkreises berechnet man: r=5. Die Gleichung des Umkreises lautet daher k: $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$. Es ist unmittelbar klar, dass P(-3, -3) auf dem Kreis liegt!

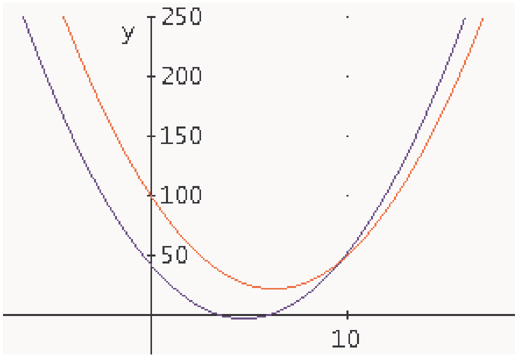
b) Die Normalen, die man durch P auf die Dreiecksseiten legt, bestimmt man folgend: Für die Seite AB lautet die Normale n_1: x – 7y = 18, für die Seite BC entsprechend n_2: 6x + 8y = -42 und für AC n_3: 7x + y = -24. Die Trägergeraden der Seiten lauten: AB: 7x + y = -14, AC: -x + 7y = 2, BC: -8x + 6y = -34. Nun schneidet man n_1 mit AB, n_2 mit BC und n_3 mit BC und erhält in dieser Reihenfolge: $S_1(-{}^{8}/_{5}, -{}^{14}/_{5})$, $S_2({}^{1}/_{5}, -{}^{27}/_{5})$, $S_3(-{}^{17}/_{5}, -{}^{1}/_{5})$. Die Wallace Gerade lautet: 13x + 9y= -46. Die folgende Skizze veranschaulicht die Lage von Kreis und Wallace Geraden:



2) a) Für Herrn Häbig gilt die Geschwindigkeitsfunktion $v_1(t) = 15 – 6{,}5 \cdot t$ auf trockener Straße und die Geschwindigkeitsfunktion $v_2(t) = 15 – 4 \cdot t$ auf nasser Straße. Seine Bremszeiten betragen demnach t_1=2,31s bzw. t_2=3,75s. Den zurückgelegten Weg berechnet man mit Hilfe der Stammfunktion der Geschwindigkeitsfunktion unter Berücksichtigung der Schrecksekunde als $s_1(t) = 15\,t – 3{,}25 \cdot t^2 + 15$ bzw. $s_2(t) = 15t – 2 \cdot t^2 + 15$. Setzt man nun t_1 bzw. t_2 ein, erhält man s_1= 32,31m bzw. s_2= 43,125m. Ein rechtzeitiges Anhalten ist daher auf nasser Fahrbahn nicht mehr möglich!

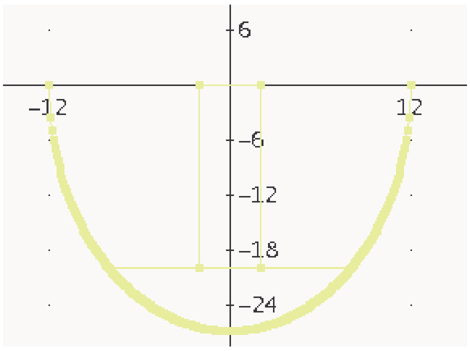
b) Für Frau Asant gilt die Geschwindigkeitsfunktion $v_3(t) = 25 – 4 \cdot t$ auf nasser Strasse, ihre Bremszeit ist entsprechend t_3= 6,25s. Da sie prompt reagiert, legt sie einen Weg von $s_3(t) = 25t – 2 \cdot t^2$ zurück, das sind in 6,25 Sekunden insgesamt s_3= 78,125m. Da sie einen Abstand von insgesamt 100 Meter hatte, kann sie selbst bei nasser Fahrbahn noch rechtzeitig stehen bleiben!

Zeichnet man für beide Wegfunktionen auf nasser Fahrbahn den Abstand vom Hindernis im Zeitverlauf, ergibt sich folgendes Bild:



Dabei muss man berücksichtigen, dass Herr Häbig erst nach 1 Sekunde zu bremsen beginnt, Frau Asant aber bereits zum Zeitpunkt t=0 bremst.

3) a) Aus dem Durchmesser an der Oberkante ermittelt man a= 12. Aufgrund der Maße liegt P(-8,-20) auf der Ellipse. Einsetzen in die Ellipsengleichung liefert $b=12\cdot\sqrt{5}$. Die Gleichung der Ellipse lautet daher: $5x^2 + y^2 = 720$. Der hohle Innenteil ist in der folgenden Skizze dargestellt:



b) Für das Volumen bestimmt man

$V=\pi\cdot\int_{-20}^{-6} 144-\frac{1}{5}y^2dy = 144y-\frac{1}{15}\cdot y^3\Big|_{-20}^{-6} = \frac{22456}{15}\cdot\pi = 4703{,}17cm^3$, also etwas mehr als 4,7 Liter. Für den Zylinder berechnet man ein Volumen von 175,93cm³, das Gesamtvolumen beträgt daher 4527,24cm³.

4) Da die Ereignisse binomialverteilt sind, berechnet man:

a) P(mindestens 2 Abos) = 1 – [P(0) + P(1)] = 1-(0,2044 + 0.359)=0,4366.

b) P(höchstens einer kauft nichts) = P(0) + P(1) mit p=0,82! Man erhält: 0.000001 + 0,00004 = 0,000041.

c) P(mehr als 2 Kunden kaufen nichts) = 1-[P(0) + P(1) + P(2)] =1-(0.000001 + 0,00004 + 0,00064 =1 - 0,000681 = 0,999319.

d) Man formuliert die Hypothesen H_0: $p\leq 0{,}18$ gegen H_1: $p>0{,}18$. Als Erwartungswert berechnet man E(X) = 25,2, die Standardabweichung beträgt $\sigma=4{,}55>3$, daher kann man die Normalverteilung als Approximation verwenden. Man bestimmt z=1,645 und erechnet einen kritischen Wert von $x_k = 25{,}2 + 1{,}645 \cdot 4{,}55 = 32{,}68$. Da der Wert in der Stichprobe über dem kritischen Wert liegt, kann H_0 mit 95% statistischer Sicherheit verworfen werden, H_1 ist damit mit 95% statistischer Sicherheit bewiesen.