

1) Gegeben ist die Funktion $f(x) = (2 - x) \cdot e^{\frac{x}{3}}$.

- a) Führe für diese Funktion eine vollständige Kurvenuntersuchung durch (Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte) und zeichne die Kurve im Intervall $[-4, 4]$!
- b) Bestimme die Gleichung der Tangente im Wendepunkt und zeichne sie in die Skizze ein!
- c) Berechne den Flächeninhalt, den die Kurve mit der x-Achse zwischen Wendepunkt und Maximum einschließt! (Tipp: es gibt genau ein Maximum!)

2) Die Gestalt einer Vase kann recht gut durch eine um die positive x-Achse rotierende Ellipse beschrieben werden. Die Vase hat an ihrer breitesten Stelle einen Durchmesser von 8cm, der Bodendurchmesser beträgt 4,8cm. Die Vase ist insgesamt 8cm hoch.

- a) Bestimme aus den Angabe die Gleichung der Ellipse, die diese Vase beschreibt und skizziere ihre Lage im Koordinatensystem!
- b) Berechne das Volumen der Vase, wenn sie bis 0,5cm unter den oberen Rand gefüllt ist!

3) a) Bestimme die Gleichung eines Kreises mit dem Radius $r = \sqrt{50}$, der seinen Mittelpunkt auf der y-Achse hat und die Gerade $g: x + y = 15$ berührt!

b) Bestimme die Gleichung einer Funktion $f(x) = a \cdot x^2 + b$, die den Kreis $k: x^2 + (y - 5)^2 = 50$ im Punkt $Q(5, 10)$ berührt! Skizziere die Lage beider Kurven im Koordinatensystem!

[1) a) 6P. b) 1P. c) 3P. 2)a) 3P. b) 2P. 3) a) 3P. b) 4P.]

Lösungen:

$$1) f(x) = (2-x) \cdot e^{\frac{x}{3}}$$

Die Nullstelle ergibt sich unmittelbar aus $f(x) = 0$ mit $x = 2$ und daher $N(2, 0)$.

Für die erste Ableitung berechnet man:

$$-1 \cdot e^{\frac{x}{3}} + (2-x) \cdot e^{\frac{x}{3}} \cdot \frac{1}{3} = e^{\frac{x}{3}} \cdot \left(-1 + \frac{2}{3} - \frac{x}{3}\right) = 0. \text{ Daraus erhält man } x = -1.$$

Für die 2. Ableitung berechnet man:

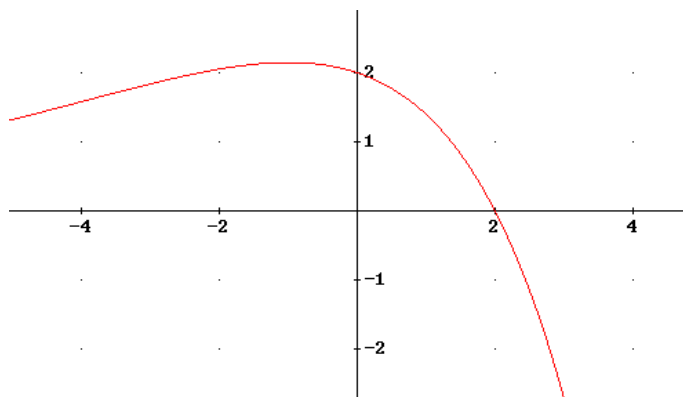
$$-e^{\frac{x}{3}} \cdot \left(\frac{x+4}{9}\right) = 0 \text{ und daraus } x = -4.$$

Wegen $f''(-1) < 0$ liegt bei $E(-1, \frac{3}{\sqrt[3]{e}})$ ein lokales Maximum vor. Bei $W(-4; 1,58)$ hat $f(x)$ einen Wendepunkt!

Die Gleichung der Wendetangente ergibt sich aus $f'(-4) = \frac{1}{e \cdot \sqrt[3]{e}} = 0,264$. Damit erhält man

$$T: y = 0,264 \cdot x + 2,636.$$

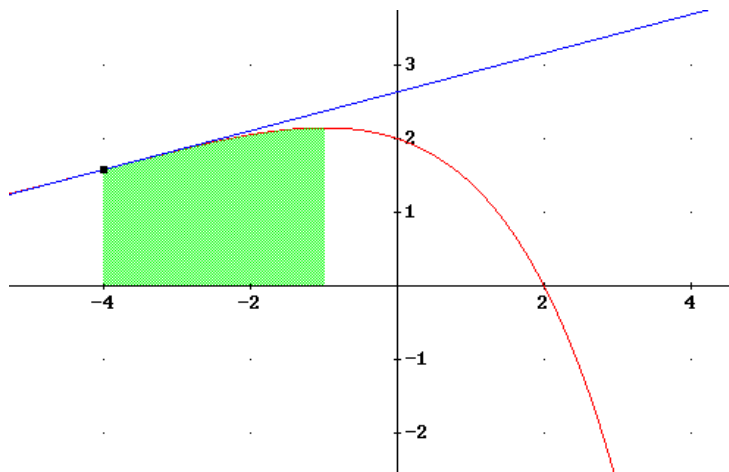
Die folgende Skizze veranschaulicht die Lage der Funktion:



Für die Flächenberechnung löst man das Integral der Funktion $f(x) = (2-x) \cdot e^{\frac{x}{3}}$ in den Grenzen -4 bis -1 .

Man erhält:

$$\int_{-4}^{-1} (2-x) \cdot e^{\frac{x}{3}} dx = 3e^{\frac{x}{3}} (5-x) \Big|_{-4}^{-1} = 5,78E^2.$$



2) Aus den Angaben entnimmt man sofort $b=4$ und $P(8, \frac{12}{5})$ auf der Ellipse. Daraus bestimmt man die Gleichung der Ellipse mit: $a=10$ und $b=4$ als $16x^2 + 100y^2 = 1600$ oder:
 $4x^2 + 25y^2 = 400$.

Das gesuchte Volumen bestimmt man aus:

$$\pi \cdot \int_{\frac{1}{2}}^8 \frac{400 - 4x^2}{25} dx = \pi \cdot \frac{927}{10} = 291,23 \text{ cm}^3$$

3) Die Gleichung des Kreises bestimmt man aus:

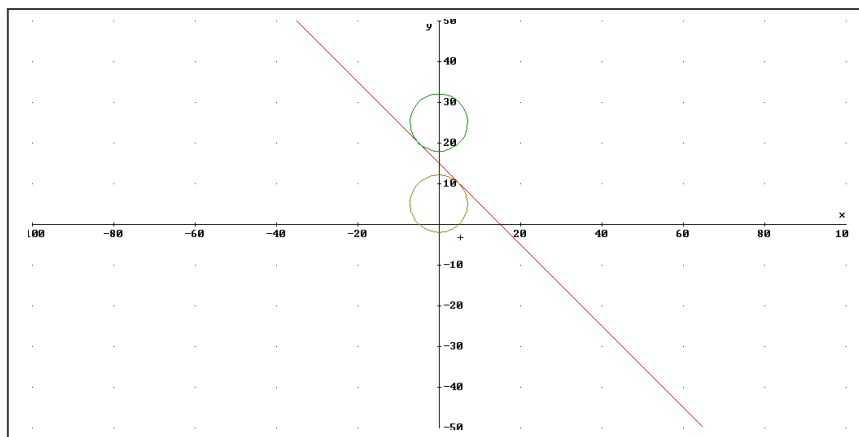
$M(0, n)$ und der Berührbedingung: $(km - n + d)^2 = r^2 \cdot (k^2 + 1)$.

$k = -1$ und $d=15$

$(-n + 15)^2 = 50 \cdot 2$ und daraus: $n=25$ bzw. $n=5$.

$M_1(0, 5)$ $M(0, 25)$

Skizze:



Für $f(x)$ erhält man $f(x) = -\frac{1}{10} \cdot x^2 + \frac{25}{2}$.

