

4. Schularbeit

6C

14. 6. 2006

- 1) Blockhäuser der Marke „Gartenfreund“ werden in zwei verschiedenen Ausführungen gefertigt, nämlich in den Modellen „Rustikal“ und „Modern“. Die folgenden beiden Tabellen beschreiben die benötigten Einzelteile bzw. Rohstoffe:

	Rustikal	Modern
Bodenplatte	1	2
Mauerteile	4	6
Fenster Teile	2	3
Dachmodul	2	4
Türen	1	2

	Bodenplatte	Mauerteile	Fenster Teile	Dachmodul	Türen
Einheit Fichtenbretter	4	10	1	4	2
Einheit Schrauben	2	5	-	4	1
Einheit Leimbinder	6	10	2	6	3
Einheit Glasplatten	-	-	2	-	3

- a) Es sollen pro Monat 300 Häuser des Typs „Rustikal“ und 220 Häuser des Typs „Modern“ hergestellt werden. Beschreibe den Bedarf an Einzelteilen (!!) durch eine entsprechende Vektorgleichung und berechne den entsprechenden Bedarf!
- b) Beschreibe für dieselbe Produktionsmenge den Gesamtbedarf an Rohstoffen (!!) durch eine entsprechende Vektorgleichung und berechne den Gesamtbedarf an Rohstoffen!
- c) Für die Rohstoffe gelten folgende Preise (je Einheit): Fichtenbretter: 20€, Schrauben: 5€, Leimbinder: 1€, Glasplatten: 8€. Die Fertigungskosten betragen beim Modell „Rustikal“ 350€, beim Modell „Modern“ 500€. Welchen Verkaufspreis soll man für die beiden Modelle ansetzen, wenn man beim Modell „Rustikal“ 180€, beim Modell „Modern“ 250€ Gewinn haben möchte? Beschreibe auch hier die Kosten durch geeignete Vektorgleichungen!

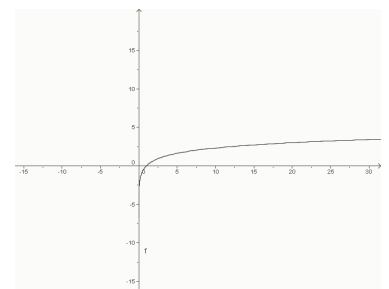
- 2) Eine vereinfachte Volkswirtschaft bestehe aus den Bereichen „Ackerbau“, „Industrie“ und „Finanz“. Die folgende Tabelle zeigt den Bedarf der einzelnen Bereiche:

Je Einheit → benötigt ↓	Ackerbau	Industrie	Finanz
Ackerbau	0,1	0,25	0,6
Industrie	0,1	0,1	0,32
Finanz	0,05	0,5	0

Zusätzlich soll ein externer Bedarf von 1000 Einheiten A, 200 Einheiten I und 500 Einheiten F erwirtschaftet werden.

Formuliere die Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Bereichen mitsamt dem externen Bedarf als Gleichungssystem und berechne die notwendigen Produktionsmengen der drei Sektoren!

- 3) Richtig oder falsch? – Bewerte die folgenden Aussagen und gib bei jeder eine ausführliche Begründung an!
- a) Für alle reellen Zahlen lässt sich ein Logarithmuswert zu einer beliebigen Basis berechnen – damit ist die Gleichung $a^x = b$ für jeden Wert von a lösbar!
- b) Die Funktion $f(x) = e^t$ beschreibt für beliebige Zeitpunkte t stets einen Wachstumsvorgang!
- c) Ist $a > 0$, so ist auch $\log(a) > 0$!
- d) Die nebenstehende Graphik zeigt den typischen Verlauf einer Logarithmusfunktion!



[1) a) 3P. b) 3P. c) 4P. 2) 6P. 3)a) 1P. b) 1P. c) 1P. d) 1P.]

Lösungen:

1)

a) Die Matrix der Einzelteile E_1 setzt sich aus den Bedarfsvektoren R und M für die Einzelteile der beiden Modelle zusammen. Daher ergibt sich der Einzelteilebedarf E als: $E = 300 \cdot R + 220 \cdot M$.

$$E = 300 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 220 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 740 \\ 2520 \\ 1260 \\ 1480 \\ 740 \end{pmatrix}.$$

Man benötigt daher 740 Bodenplatten, 2520 Mauerteile, 1260 Fensterteile, 1480 Dachmodule und 740 Türen.

Ebenso hätte man den Produktionsvektor $P=(300, 200)$ mit der „gekippten“ (transponierten) Bedarfsmatrix der Einzelteile E_1^T multiplizieren können. (Achtung auf die Dimension der Matrix: Hier wird eine „einzeilige, zwispaltige Matrix“ mit einer „zweizeiligen, fünfspaltigen“ Matrix multipliziert. Das Ergebnis ist eine einzeilige, fünfspaltige Matrix.

$$(300 \quad 220) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (740 \quad 2520 \quad 1260 \quad 1480 \quad 740)$$

(Zur Erläuterung: 740 erhält man aus: $300 \cdot 1 + 220 \cdot 2 \dots$)

b) Bezeichnet man die Rohstoffe mit FB (Fichtenbretter), S (Schrauben), L (Leimbinder) und G (Glasplatten), erhält man beispielsweise den Bedarf an Fichtenbrettern aus der Gleichung:

$$FB = 4 \cdot B + 10 \cdot M + 1 \cdot F + 4 \cdot D + 2 \cdot T.$$

Übersichtlicher lässt sich der Gesamtbedarf an Rohstoffen als Matrix anschreiben:

Bezeichnet man mit R_0 die Matrix der Rohstoffe, so gilt:

$$R_0 = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 0 & 4 & 1 \\ 6 & 10 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Für den Gesamtbedarf G gilt dann: } G = R_0 \cdot E - \text{das Ergebnis ist wiederum eine}$$

vierzeilige, einspaltige Matrix (eigentlich ein Vektor), der den Gesamtbedarf an Rohstoffen (allerdings nicht mehr nach Modellen getrennt!) angibt.

Man erhält für G:

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 0 & 4 & 1 \\ 6 & 10 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 740 \\ 2520 \\ 1260 \\ 1480 \\ 740 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36820 \\ 20740 \\ 43260 \\ 4740 \end{pmatrix}$$

Man benötigt daher: 36820 FB, 20740 S, 43260 L und 4740 G.

Anmerkung: Den Gesamtbedarf nach Modellen getrennt hätte man folgend ermitteln können: Dazu hätte man lediglich die Rohstoffmatrix R_0 mit der (nicht gekippten) Einzelteilematrix E_1 aus der Angabe multiplizieren müssen, um den Gesamtbedarf je Modell G_M zu erhalten: man berechnet dann:

$$G_M = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 0 & 4 & 1 \\ 6 & 10 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 & 91 \\ 31 & 52 \\ 65 & 108 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}$$

Die letzte Matrix gibt den Rohstoffbedarf nach Rohstoffen und Modellen getrennt für jeweils ein Haus des jeweiligen Typs an. Den Gesamtbedarf G für den Produktionsvektor P erhält man, indem man G_M mit dem (gekippten) Produktionsvektor P^T multipliziert. Das heißt:
 $G = G_M \cdot P^T$:

$$G = \begin{pmatrix} 56 & 91 \\ 31 & 52 \\ 65 & 108 \\ 7 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 220 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36820 \\ 20740 \\ 43260 \\ 4740 \end{pmatrix}.$$

c) Für den Rohstoffkostenvektor K_1 gilt: $K_1 = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$. Die Rohstoffkosten K_R nach Modellen getrennt erhält

man daher aus: $K_R = K_1 \cdot G_M$ und das ergibt:

$$K_R = \begin{pmatrix} 20 & 5 & 1 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 56 & 91 \\ 31 & 52 \\ 65 & 108 \\ 7 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1396 & 2284 \end{pmatrix}. \text{ Die Rohstoffkosten betragen daher beim Modell}$$

„Rustikal“ 1396€, beim Modell „Modern“ 2284€. Addiert man die Fertigungskosten, erhält man Gesamtkosten in der Höhe von 1746€ bzw. 2784€. Wenn man beim Modell „Rustikal“ 180€, beim Modell „Modern“ 250€ Gewinn haben möchte, heißt das, dass der Verkaufspreis für „Rustikal“ bei 1926€, für „Modern“ bei 3034€ liegen sollte.

Eine andere Möglichkeit zur Kostenkalkulation wäre die folgende:

Man berechnet zunächst die Kosten K_E für die entsprechenden Einzelteile, indem man die „gekippte“ Rohstoffmatrix mit dem Rohstoffkostenvektor K_1 multipliziert. Dies ergibt: $K_E = R_0 \cdot K_1$.

$$K_E = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 0 \\ 10 & 5 & 10 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 96 \\ 235 \\ 38 \\ 106 \\ 72 \end{pmatrix}.$$

Die Kosten betragen daher je Bodenplatte 96€, je Mauerteil 235€, je Fensterteil 38€, je Dachmodul 106€ und je Tür 72€. Die Materialkosten je Modell kann man nun leicht durch Multiplikation des Vektors K_E mit der Matrix der Einzelteile E_1 ermitteln: Man erhält:

$$(96 \quad 235 \quad 38 \quad 106 \quad 72) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (1396 \quad 2284). \text{ Die Materialkosten betragen daher für das Modell}$$

„Rustikal“ 1396€ und für das Modell „Modern“ 2284€. Die Gesamtkosten berechnet man in der gleichen Weise wie oben.

2) Es gilt: Zu produzierende Menge = Nettobedarf (der einzelnen Bereiche untereinander) + Sekundärbedarf (externer Bedarf, der gedeckt werden soll!).

Man erhält das Gleichungssystem:

$$A = 1000 + 0,1 \cdot A + 0,25 \cdot I + 0,6 \cdot F$$

$$I = 200 + 0,1 \cdot A + 0,1 \cdot I + 0,32 \cdot F$$

$$F = 500 + 0,05 \cdot A + 0,5 \cdot I$$

Daraus berechnet man eine Produktionsmenge von 2000 Einheiten Ackerbau, 800 Einheiten Industrieproduktion und 1000 Einheiten Finanz.

- 3) a) Falsch – der Logarithmus ist nur für positive reelle Zahlen definiert! Begründung: Als Umkehrung der Exponentialfunktion, die nur positiv Funktionswerte annehmen kann, kann es keinen Logarithmus für negative Zahlen oder 0 geben!
- b) Richtig, denn wegen $e = 2,7182\dots$ gilt $e > 1$, Wachstumsvorgänge werden durch das Modell $B_t = B_0 \cdot q^t$ mit $q > 1$ beschrieben!
- c) Falsch, die Logarithmusfunktion nimmt für $0 < a < 1$ negative Werte an, denn es gilt z.B. für den natürlichen Logarithmus: $x = e^{\ln x}$. Wegen $e > 1$ lässt sich eine kleiner Zahl als Ergebnis nur erreichen, wenn der Exponent negativ ist (zur Erinnerung: $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$).
- d) Richtig, es sind die Eigenschaften aus c) erkennbar, die Funktion geht durch $P(1, 0)$ und strebt für große x -Werte gegen unendlich!