3. Schularbeit

6C 28. 3. 2006

Jahr	Bevölkerung
1951	95.055
1961	100.695
1971	116.010
1981	117.287
1991	118.112
2001	113.392

1) Die nebenstehende Tabelle zeigt die Bevölkerungsentwicklung in Innsbruck seit 1951.
a) Erstelle für den angegebenen Zeitraum sowohl ein lineares als auch ein nichtlineares Wachstumsmodell und interpretiere die Modellgleichungen!
b) Erstelle aufgrund beider Modellgleichungen eine Bevölkerungsprognose für 2006 und 2020!
c) In welchem Zeitraum verdoppelt sich die Bevölkerung Innsbrucks? Wann wird Innsbruck voraussichtlich mehr als 120000 Einwohner haben?

2) Das radioaktive C14 hat eine Halbwertszeit von 5760 Jahren.
a) Beschreibe den Abbau von C14 durch ein entsprechendes Zerfallsgesetz!
b) Wie lange dauert es, bis nur noch 10% der Anfangskonzentration vorhanden sind?
c) Das Alter eines Tierskeletts wird von Historikern auf etwa 13000 Jahre geschätzt. Der herbeigeholte Chemiker misst eine C14 Konzentration von 32%. Was kann man über das Alter des Tierskeletts aussagen?
d) Wie stark schwankt das Alter, wenn der Chemiker die C14 – Konzentration auf 0,5% genau gemessen hat?

3) a) Stelle eine Vermutung über die Monotonie der Folge $a_n = \frac{4n-1}{n+2}$ und beweise sie!

b) Berechne den Grenzwert der Folge $a_n = \frac{1+\frac{n}{n^2-1}}{n}$

c) Zeige, dass die Folge $a_n = \frac{4-2n}{n}$ den Grenzwert -2 besitzt! Ab welchem Index n liegen alle Folgenwerte höchstens $^1/_{1000}$ vom Grenzwert entfernt?

4) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$
a) Bestimme den Definitionsbereich der Funktion!
b) Bestimme die Polstellen für f(x) sowie alle einseitigen Grenzwerte in der Umgebung der Polstellen!
c) Untersuche das Verhalten von f(x) für $x \to \pm\infty$ und skizziere den Verlauf der Funktion!

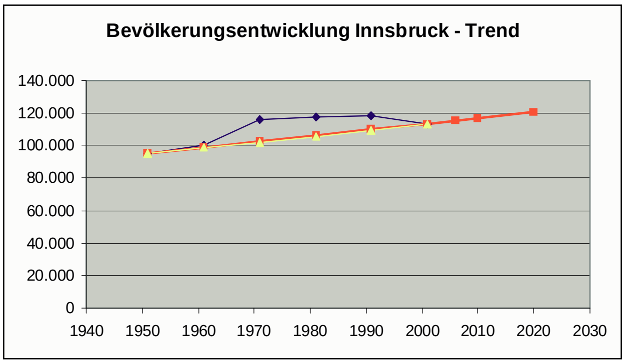
[1) a) 2P. b) 1P. c) 2P. 2) a) 1P. b) 1P. c) 2P. d) 2P. 3)a) 2P. b) 2P. c) 3P. 4) a) 1P. b) 3P. c) 2P.]

Lösungen:

1) a) Aus den Daten berechnet man für das lineare Prognosemodell:
$B_t = 95055 + 366{,}74 \cdot t$, für das nichtlineare Prognosemodell entsprechend: $B_t = 95055 \cdot 1{,}00353^t$.
b) Die Ergebnisse der Prognoserechnung sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

Jahr	Bevölkerung	Modell linear	Modell nichtlinear
1951	95.055	95.055	95.055
1961	100.695	98.722	98.468
1971	116.010	102.390	102.004
1981	117.287	106.057	105.667
1991	118.112	109.725	109.461
2001	113.392	113.392	113.392
2006		115.226	
2010		116.693	
2020		120.360	

Die folgende Graphik veranschaulicht die Entwicklung:



c) Nach dem linearen Modell erhält man eine Verdopplungszeit von ca. 259 Jahren, nach dem nichtlinaren Modell beträgt die Verdopplungszeit ca. 196,5 Jahre. Die Einwohnerzahl von 120000 Einwohnern wird nach dem linearen Modell voraussichtlich im Jahre 2019, nach dem nichtlinearen Modell voraussichtlich im Jahre 2017 erreicht werden.

2) a) Aus der Halbwertszeit von 5760 Jahren berechnet man das Wachstumsgesetz $B_t = B_0 \cdot 0.9998796691^t$.
b) 10% der Anfangskonzentration sind nach ca. 19134 Jahren vorhanden!
c) Die Konzentration von 32% ergibt ein Alter von ca. 9468 Jahren, die Historiker liegen also mit ihrer Schätzung ziemlich daneben!
d) Aufgrund der Messwertschwankung ergibt sich ein Altersbereich von 9340 – ca. 9600 Jahren!

3) a) Man berechnet für $a_n = 1, {}^{7}/_{4}, {}^{11}/_{5}, \ldots$ - Vermutung – streng monoton wachsend:
Beweis: Es muss für alle natürlichen Zahlen gelten: $a_n < a_{n+1}$: das heißt:

$\frac{4n-1}{n+1} < \frac{4\cdot(n+1)-1}{n+2}$, daher $\frac{4n-1}{n+1} < \frac{4n+3}{n+2}$ und weiter:

$\frac{4n^2-n+8n-2}{(n+1)\cdot(n+2)} < \frac{4n^2+3n+4n+3}{(n+1)\cdot(n+2)}$, daher $-2 < +3$, womit die vermutete Monotonie beweisen ist.

b)

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1+\frac{n}{n^2-1}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+0}{n} = 0$, die Folge ist daher eine Nullfolge!

c) Aufgrund der Grenzwertsätze ist klar, dass die Folge den Grenzwert 4 besitzt, Es gilt:
$\left|\frac{4-2n}{n}-(-2)\right|<\frac{1}{1000}$, das heißt: $\left|\frac{4-2n+2n}{n}\right|<\frac{1}{1000}$ und daher: $\left|\frac{4}{n}\right|<\frac{1}{1000}$, woraus: $n>4000$ folgt.

4) $f(x)=\frac{x-1}{x^2-4}$

a) Für den Definitionsbereich gilt: $D=\Re\backslash\{2,-2\}$, Polstellen bei x=2 und x=-2.

b) Für die einseitigen Grenzwerte gilt: $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=+\infty$,

c) Für f(x) gilt weiters: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, die x-Achse ist waagrechte Asymptote! Die folgende Skizze veranschaulicht den Verlauf der Funktion!