4. Schularbeit

5C / Gruppe A 9. 6. 2006

1) Von einem Parallelogramm kennt man A(-2, 3), B(6, -1) und C(10, 3).
a) Berechne den Eckpunkt D sowie den Umfang des Parallelogramms!
b) Teile die Strecke AB innen im Verhältnis 5:3 und berechne den entsprechenden Teilungspunkt T!
c) Überprüfe, dass Q(9, 2) die Strecke BC genau im Verhältnis 3:1 teilt!
d) Bestimme den Schwerpunkt S des Dreiecks ABD und überprüfe, dass S die Strecke AC im Verhältnis 1:2 teilt!

2) Die Gerade g durch die Punkte X(2, -4) und Y(6, 8) wird von der Geraden h: X=(1, 3) + t · (3, -1) im Punkt Z geschnitten.
a) Berechne den Schnittpunkt der beiden Geraden!
b) Zeige, dass Z der Mittelpunkt der Stecke XY ist!
c) Zeige, dass g und h aufeinander normal stehen!

3) Gegeben ist das Dreieck ABC mit A(-1, -1), B(5, 5), C(-4, 2)
a) Berechne für dieses Dreieck die Koordinaten des Umkreismittelpunktes!
b) Zeige, dass dieses Dreieck rechtwinklig ist und die Seite c genau doppelt so lang ist wie die Seite b!
c) Zeige, dass der Schwerpunkt des Dreiecks auf der y-Achse liegt!

[1) a) 2P. b) 2P. c) 1P. d) 1P. 2) a) 3P. b) 1P. c) 1P. 3) a) 4 P. b) 2P. c) 1P.]

4. Schularbeit

5C / Gruppe B 9. 6. 2006

1) Von einem Parallelogramm kennt man A(1, 6), B(9, 2) und C(13, 6).
a) Berechne den Eckpunkt D sowie den Umfang des Parallelogramms!
b) Teile die Strecke AB innen im Verhältnis 3:5 und berechne den entsprechenden Teilungspunkt T!
c) Überprüfe, dass Q(12, 5) die Strecke BC genau im Verhältnis 3:1 teilt!
d) Bestimme den Schwerpunkt S des Dreiecks ABD und überprüfe, dass S die Strecke AC im Verhältnis 1:2 teilt!

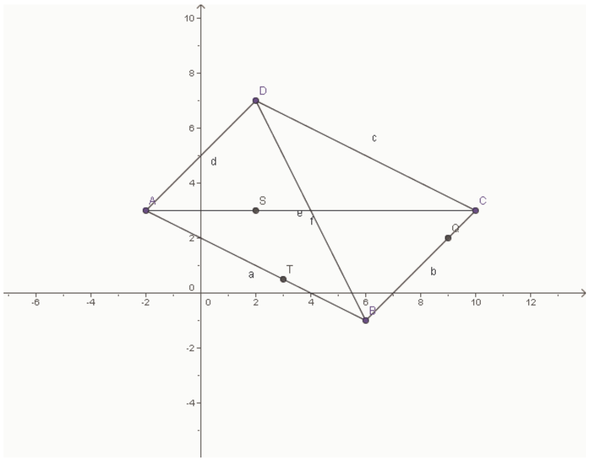
2) Die Gerade g durch die Punkte X(-1, -7) und Y(3, 5) wird von der Geraden h: X=(-2, 0) + t · (3, -1) im Punkt Z geschnitten.
a) Berechne den Schnittpunkt der beiden Geraden!
b) Zeige, dass Z der Mittelpunkt der Stecke XY ist!
c) Zeige, dass g und h aufeinander normal stehen!

3) Gegeben ist das Dreieck ABC mit A(2, 2), B(8, 8), C(-1, 5)
a) Berechne für dieses Dreieck die Koordinaten des Umkreismittelpunktes!
b) Zeige, dass dieses Dreieck rechtwinklig ist und die Seite c genau doppelt so lang ist wie die Seite b!
c) Zeige, dass der Schwerpunkt des Dreiecks auf der Geraden u: 2x – y = 1 liegt!

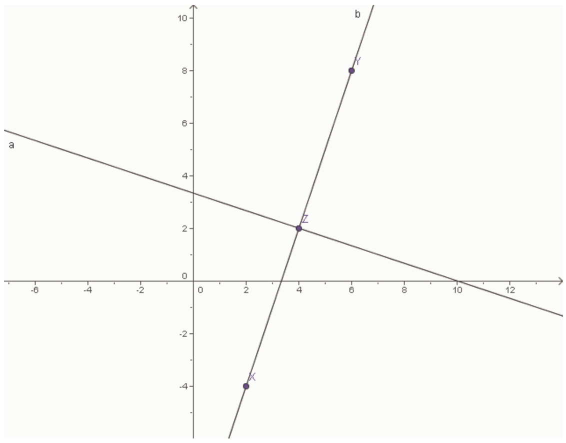
[1) a) 2P. b) 2P. c) 1P. d) 1P. 2) a) 3P. b) 1P. c) 1P. 3) a) 4 P. b) 2P. c) 1P.]

Lösungen:
Gruppe A:

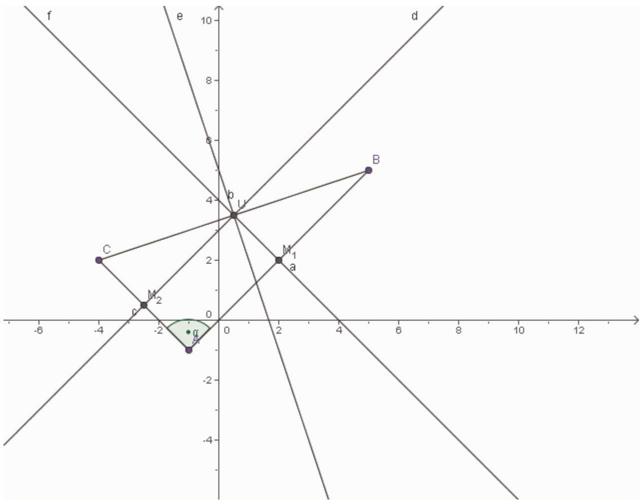
1) a) Den Eckpunkt D erhält man aus: D= A + BC = (2, 7).
Die Seitenlängen betragen |AB| = 8,94 bzw. |BC|= 5,66 – der Umfang daher entsprechend: U=29,2.
b) Für den inneren Teilungspunkt T gilt: T=A + $^{5}/_{8}$ · AB = (3, $^{1}/_{2}$).
c) Stimmt die Behauptung, muss gelten: Q = B + $^{3}/_{4}$ · BC = (6, -1) + $^{3}/_{4}$ · (4, 4) = (6, -1) + (3, 3) = (9, 2), womit der Nachweis erbracht ist!
d) Für den Schwerpunkt S berechnet man nach der Schwerpunktsformel S(2, 3). Es gilt: S=A + $^{1}/_{3}$ · AC, daher teilt S auch die Strecke AC im Verhältnis 1:2!
Die folgende Skizze veranschaulicht die Lage des Parallelogramms:



2) Für die Parameterform der Geraden g berechnet man:
X= (2, -4) + t · (4, 12), die Normalvektorform lautet:
-12x + 4y = -40 oder 3x – y =10. Schreibt man die Gerade h ebenfalls in Normalvektorform an, erhält man:
x +3y = 10. Löst an dieses Gleichungssystem, erhält man als Schnittpunkt Z(4, 2). Z ist genau der Mittelpunkt der Strecke XY! Dass g und h aufeinander normal stehen, ist bei Ansicht der Normalvektoren bzw. Richtungsvektoren klar. Es gilt (3, -1) · (1, 3) = 0!
Die folgende Skizze zeigt die Lage der beiden Geraden:



3) a) Man berechnet M_{AB} = (2, 2) und AB=(6, 6). s_{AB} hat daher die Gleichung: 6x + 6y = 24 oder x + y = 4.
Für M_{BC} erhält man ($^{1}/_{2}$, $^{7}/_{2}$), BC=(-9, -3). S_{BC} hat daher die Gleichung: -9x – 3y = -15 oder 3x + y = 5. Daraus errechnet man den Umkreismittelpunkt mit U($^{1}/_{2}$, $^{7}/_{2}$).
b) Dass das Dreieck rechtwinklig ist, folgt aus: AB ·AC = (6, 6) · (-3, 3) = 0. |AB| = $\sqrt{72}$, |AC| = $\sqrt{18}$.
c) Für den Schwerpunkt des Dreiecks berechnet man S(0, 2), die Behauptung stimmt also!
Die folgende Skizze veranschaulicht die Lage des Dreiecks:



Gruppe B:

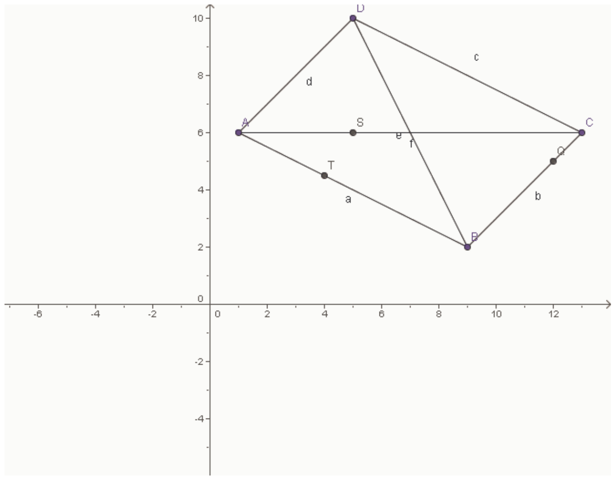
1) a) Den Eckpunkt D erhält man aus: D= A + BC = (5, 10). Die Seitenlängen betragen |AB| = 8,94 bzw. |BC|= 5,66 – der Umfang daher entsprechend: U=29,2.

b) Für den inneren Teilungspunkt T gilt: T=A + $^3/_8$ · AB = (4, $^9/_2$).

c) Stimmt die Behauptung, muss gelten: Q = B + $^3/_4$ · BC = (9, 2) + $^3/_4$ · (4, 4) = (9, 2) + (3, 3) = (12, 5), womit der Nachweis erbracht ist!

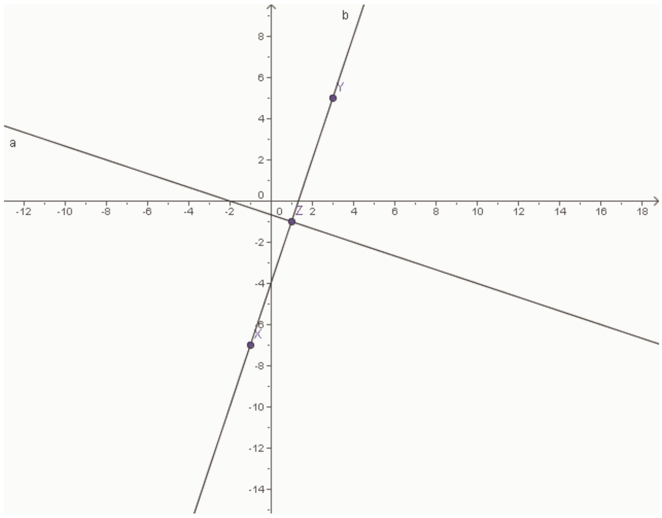
d) Für den Schwerpunkt S berechnet man nach der Schwerpunktsformel S(5, 6). Es gilt: S=A + $^1/_3$ · AC, daher teilt S auch die Strecke AC im Verhältnis 1:2!

Die folgende Skizze veranschaulicht die Lage des Parallelogramms:



2) Für die Parameterform der Geraden g berechnet man: X= (-1, -7) + t · (4, 12), die Normalvektorform lautet: -12x + 4y = -16 oder 3x – y = 4. Schreibt man die Gerade h ebenfalls in Normalvektorform an, erhält man: x +3y = -2. Löst an dieses Gleichungssystem, erhält man als Schnittpunkt Z(1, -1). Z ist genau der Mittelpunkt der Strecke XY! Dass g und h aufeinander normal stehen, ist bei Ansicht der Normalvektoren bzw. Richtungsvektoren klar. Es gilt (3, -1) · (1, 3) = 0!

Die folgende Skizze zeigt die Lage der beiden Geraden:



3) a) Man berechnet M_{AB} = (5, 5) und AB=(6, 6). s_{AB} hat daher die Gleichung: 6x + 6y = 60 oder x + y = 10. Für M_{BC} erhält man ($^7/_2$, $^{13}/_2$), BC=(-9, -3). S_{BC} hat daher die Gleichung: -9x – 3y = -51 oder 3x + y = 17. Daraus errechnet man den Umkreismittelpunkt mit U($^7/_2$, $^{13}/_2$).

b) Dass das Dreieck rechtwinklig ist, folgt aus: AB ·AC = (6, 6) · (-3, 3) = 0. |AB| = $\sqrt{72}$, |AC| = $\sqrt{18}$.

c) Für den Schwerpunkt des Dreiecks berechnet man S(3, 5), die Behauptung stimmt also!

Die folgende Skizze veranschaulicht die Lage des Dreiecks: