2. Schularbeit - computerunterstützt

8C 27.1.2005

1) Dieses Beispiel ist vollständig und detailliert im Heft zu rechnen! Ergebnisse können mit dem Computer überprüft werden!

Funktionen des Typs f(x) = a · x · ln(x), wobei a eine beliebige reelle Zahl ist, haben genau einen Extremwert.

a) Beweise diese Behauptung und berechne allgemein Lage und Art des Extremwerts!
b) Zeige, dass f(x) keinen Wendepunkt haben kann!
c) Skizziere den Verlauf der Funktionen für a=1 und a= 2!
d) Die beiden Funktionen in c) legen zwischen Extremwert und Nullstelle eine Fläche fest. Berechne den Inhalt dieser Fläche!

2) Dieses Beispiel ist vollständig und detailliert im Heft zu rechnen! Ergebnisse können mit dem Computer überprüft werden!

a) Bestimme die Gleichung eines Kreises, der durch die Brennpunkte der Hyperbel $5x^2 - 20y^2 = 16$ geht und den Mittelpunkt M(0, 4) hat.

b) Berechne die Schnittpunkte dieses Kreises mit den Asymptoten der Hyperbel.

c) Zeige, dass die Verbindungslinie der beiden Schnittpunkte mit positiven x-Werten Tangente an die Hyperbel ist!

3) Die Funktion $f(x) = \frac{x}{3} \cdot \sqrt{12 - x}$ bildet bei Drehung entlang der positiven x-Achse eine Vase, deren Bodendurchmesser 6cm beträgt. Die Höhe der Vase misst man entlang der positiven x-Achse mit 8cm.

a) Stelle die Form der Vase in einer Skizze dar!
b) Wieviel Flüssigkeit fasst die Vase, wenn sie bis 1cm unter den oberen Rand gefüllt ist?

4) Erfahrungsgemäß erliegen etwa 8% aller Hausfrauen dem Charme eines Zeitschriftenvertreters – und bestellen ein Jahresabo. Ein Vertreter plant, an einem Vormittag sechs Hausfrauen zufällig zu besuchen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) alle sechs ein Jahresabo bestellen? b) weniger als die Hälfte ein Jahresabo bestellt? c) zumindest eine Hausfrau die Bestellung nicht unterschreibt?

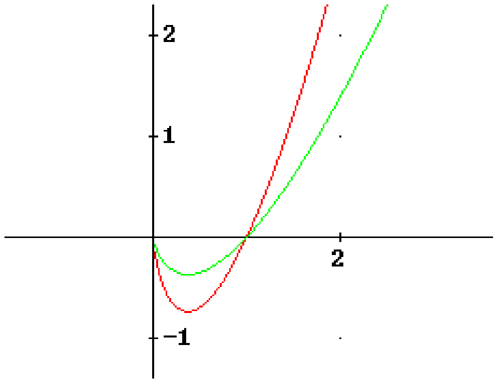
[1)a)2P. b)1P c)2P. d)3P. 2) a)2P. b)1P. c) 2P 3)a) 1P. b) 3P. 4) a) 1P. b)1P. c)1P.]

Lösungen:

1)a) f(x) ist nur für positive reelle Zahlen definiert. Man berechnet f '(x) = a · ln(x) + a. Daraus entnimmt man x= $^{1}/_{e}$, die Funktionen haben also alle an der Stelle E($^{1}/_{e}$, - $^{a}/_{e}$) eine waagrechte Tangente.

b)Für f ''(x) gilt: f ''(x)= $^{a}/_{x}$, die Funktion kann daher keinen Wendepunkt haben!

c) Die folgende Skizze zeigt den Verlauf der beiden Funktionen für a=1 und a=2:



d) Die Nullstelle beider Funktionen liegt bei N(1, 0), die gesuchte Fläche kann daher folgend berechnet werden:

$$A=\int_{\frac{1}{e}}^{1} 2x\cdot\ln(x)-x\cdot\ln(x)dx=\int_{\frac{1}{e}}^{1} x\cdot\ln(x)dx=\frac{1}{4}x^2\cdot(2\cdot\ln(x)-1)\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{4}\cdot(2\cdot\ln(1)-1)-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{e^2}\cdot\left(2\cdot\ln\left(\frac{1}{e}\right)-1\right)=$$

$$-\frac{1}{4}+\frac{3}{4e^2}=\left|-0{,}148\right|=0{,}148E^2$$

Das Integral wird dabei mit Hilfe partieller Integration berechnet!

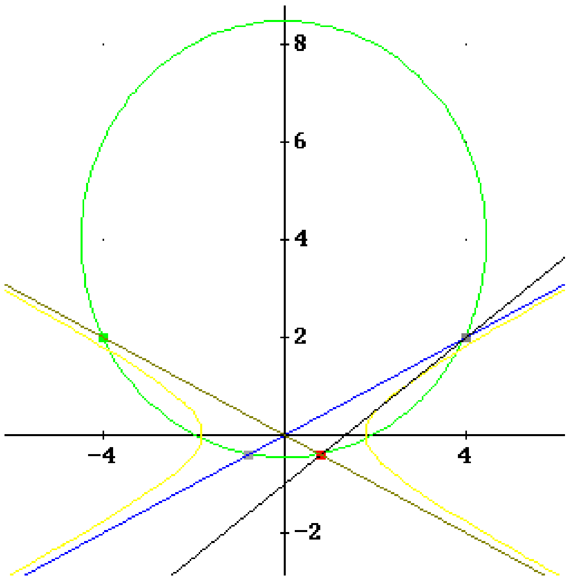
2) a) Man berechnet zunächst für die Hyperbel a^2=$^{16}/_{5}$ und b^2= $^{4}/_{5}$. Die Brennpunkte der Hyperbel erhält man daraus mit F_1(-2, 0) und F_2(2, 0). Der Kreisradius entspricht der Länge des Vektors MF_1 und ist $r=\sqrt{20}$. Die Kreisgleichung lautet daher: k: $x^2 + (y-4)^2 = 20$.

c) Die Gleichungen der Asymptoten erhält man aus $y=\pm\frac{b}{a}\cdot x=\pm\frac{1}{2}\cdot x$. Schneidet man den Kreis mit den Asymptoten, erhält man folgende Schnittpunkte S_1(-$^{4}/_{5}$, -$^{2}/_{5}$) S_2(4, 2), S_3(- 4, 2), S_4($^{4}/_{5}$, -$^{2}/_{5}$) .

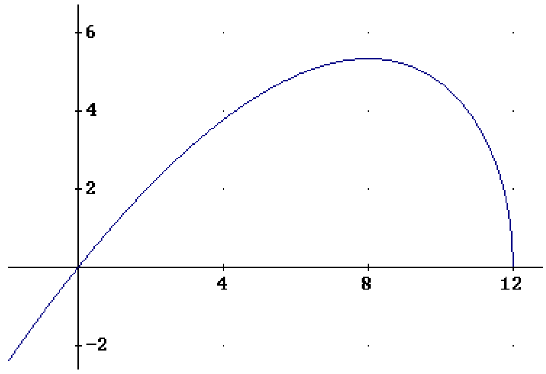
d) Legt man durch S_2 und S_4 eine Gerade, erhält man die Gleichung: 3x - 4y = 4. Diese Gerade hat die Steigung k=$^{3}/_{4}$ und d= -1. Setzt man diese Werte in die Berührbedingung der Hyperbel ein, erhält man:

$^{16}/_{5} \cdot {}^{9}/_{16} - {}^{4}/_{5} = 1$ und damit eine wahre Aussage. Die Verbindungsgerade ist tatsächlich eine Tangente an die Hyperbel!

Die folgende Skizze beschreibt die Lage der Kurven und der Tangente:



3) Die folgende Skizze zeigt den Verlauf der Funktion:

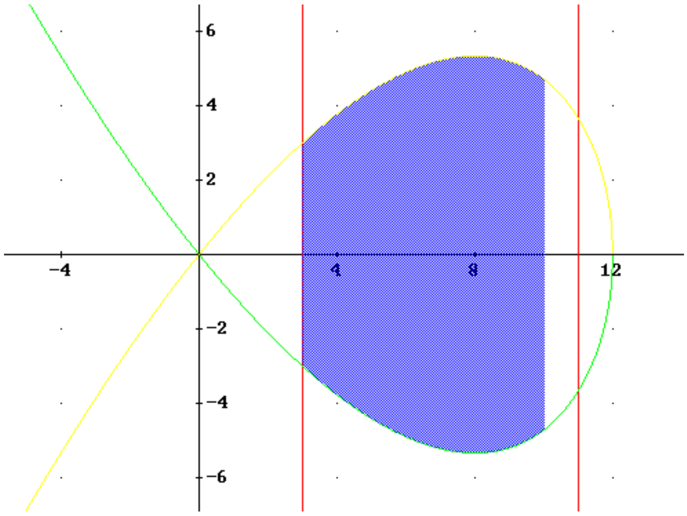


Da der Bodendurchmesser 6cm beträgt, erhält man aus der Gleichung f(x) = 3 jene Stelle x, an der die Vase „beginnt". Man berechnet: x=3, die zweite Lösung kann aufgrund der Vasenhöhe von 8cm vernachlässigt werden. Man erhält daher als Begrenzung der Vase die Werte x_1=3 und x_2=11. Das gesuchte Volumen (bis 1cm unter den oberen Rand) berechnet man folgend:

$$V=\pi\cdot\int_3^{10}\left(f(x)\right)^2dx=\pi\cdot\int_3^{10}-\frac{1}{9}x^3+\frac{4}{3}x^2dx=\pi\cdot\left(-\frac{1}{36}x^4+\frac{4}{9}x^3\right)\Big|_3^{10}\pi\cdot\left(-\frac{10000}{36}+\frac{4000}{9}+\frac{81}{36}-\frac{108}{9}\right)$$

$$=\frac{1883}{12}\cdot\pi=492{,}97cm^3$$

Die folgende Skizze beschreibt die Lage der Vase sowie das Volumen:



4) a) Die Wahrscheinlichkeit, dass alle sechs Hausfrauen ein Jahresabo bestellen, beträgt:P= $0{,}08^6$=0,00000026.

b) P(weniger als die Hälfte) = P(0) + P(1) + P(2) = 0,6064 + 0,3164 + 0,0688 = 0,9915.

c) P(zumindest 1 Hausfrau unterschreibt nicht) = 1 – P(alle unterschreiben) =
= 1 – 0,00000026=0,99999974.