

- 1) Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = x \cdot e^{\frac{x}{2}}$
- Diskutiere die Funktion (Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen) und skizziere den Verlauf der Funktion!
 - Die Funktion $f(x)$, die Funktion $g(x) = e^{\frac{x}{2}}$ und die y -Achse schließen eine Fläche ein. Berechne den Inhalt dieses Flächenstücks!
- 2) Eine kleine Blumenvase kann näherungsweise durch eine um die positive y -Achse rotierende Hyperbel beschrieben werden. Die Vase hat an ihrer engsten Stelle einen Bodendurchmesser von 4cm und ist 6cm hoch. Der Durchmesser an der Oberkante beträgt 8cm.
- Bestimme die Gleichung der Hyperbel!
 - Wieviel Wasser befindet sich in der Vase, wenn sie bis $\frac{1}{2}$ cm unter den oberen Rand gefüllt ist?
 - Innerhalb einer Woche ist der Wasserspiegel durch Verdunstung um 1cm gesunken. Wieviel Wasser ist in dieser Zeit verdunstet?
- 3) Ein Kreis, der seinen Mittelpunkt auf der x -Achse hat, wird von der Geraden $g: -3x + 4y = 1$ im Punkt $P(5, y)$ berührt!
- Bestimme aus diesen Angaben die Gleichung des Kreises!
 - Zeige, dass die Gerade $h: 3x + 4y = 49$ ebenfalls Kreistangente ist und berechne auch die Koordinaten des Berührungspunkts T !
 - Der Schnittpunkt S der beiden Geraden g und h , der Kreismittelpunkt M sowie der Punkt T bilden ein Dreieck. Berechne seinen Flächeninhalt!
- 4) Erfahrungsgemäß sind 10% aller verpackten Hühnereier zum Zeitpunkt des Ablaufdatums bereits verdorben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, in einer Stichprobe von 15 Eiern
- höchstens zwei verdorbene Eier zu finden?
 - mindestens ein verdorbenes Ei zu finden?
 - Dr. Salmonell fand in einer Stichprobe von 150 Eiern 18 Eier, die verdorben waren. Reicht dies aus, um mit 95% statistischer Sicherheit dem Händler einen höheren Prozentanteil an verdorbenen Eiern zu unterstellen? Führe einen entsprechenden Hypothesentest durch und erkläre die Schlussfolgerungen!

[1) a) 5P. b) 3P. 2)a) 3P. b) 3P. c) 2P. 3) a) 2P. b) 2P. c) 2P. 4)a) 2P. b) 1P. c) 3P.]

Lösungen:

1)

$f(x) = x \cdot e^{\frac{x}{2}}$. Für die Nullstellen ermittelt man $N(0, 0)$.

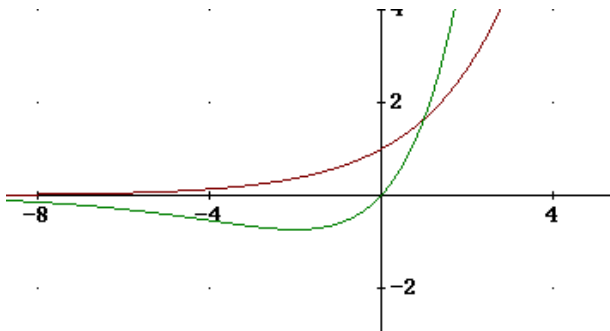
Die Punkte mit waagrechter Tangente erhält man aus $f'(x) = e^{\frac{x}{2}} + x \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{2}\right) = 0$

$x = -2$. Wegen $f''(x) = e^{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{x}{2}\right) + e^{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} = e^{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{x}{2} + 1\right) = 0$ liegt bei $x = -4$ ein Wendepunkt vor.

Man berechnet $f''(-2) > 0$, daher liegt in $E(-2, -\frac{2}{e})$ ein lokales Minimum vor. Der Wendepunkt liegt bei $W(-4, -\frac{4}{e^2})$.

Die Funktion $g(x) = e^{\frac{x}{2}}$ hat keine Nullstelle, keinen Extremwert und auch keinen Wendepunkt. Sie ist überall streng monoton wachsend.

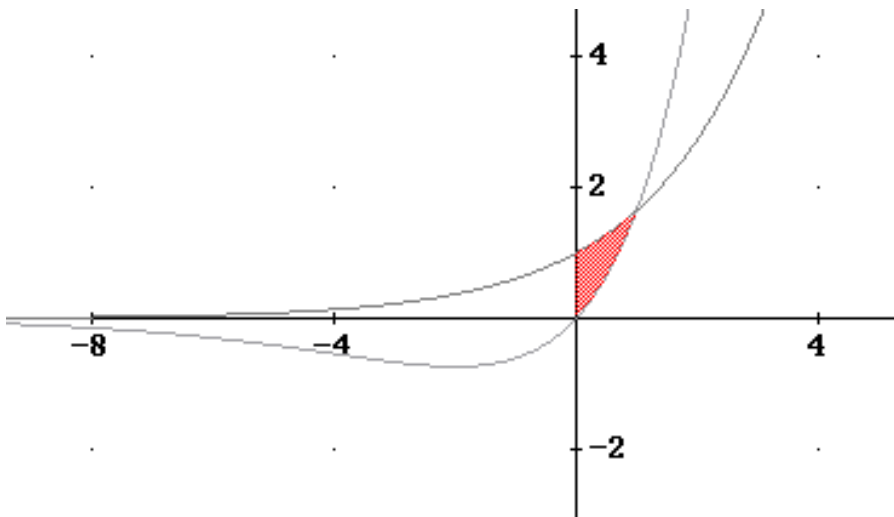
Die folgende Skizze zeigt den Verlauf der beiden Funktionen:



Die beiden Funktionen schneiden einander bei $x=1$, wie man durch Gleichsetzen der Funktionen unmittelbar ermittelt. Das gesuchte Flächenstück lässt sich daher folgend berechnen:

$$A = \int_0^1 e^{\frac{x}{2}} - x \cdot e^{\frac{x}{2}} dx = \int_0^1 (1-x) \cdot e^{\frac{x}{2}} dx = 4 \cdot \sqrt{e} - 6 \approx 0,595 \text{ Flächeneinheiten.}$$

Die folgende Graphik zeigt das gesuchte Flächenstück:



2)a) Aus der Angabe entnimmt man $a=2$. Außerdem liegt $P(4, 6)$ auf der Hyperbel. Setzt man den Punkt in die Hyperbelgleichung ein, erhält man unmittelbar $b^2 = 12$. Die Hyperbelgleichung lautet somit $\text{hyp}: 12x^2 - 4y^2 = 48$ oder: $3x^2 - y^2 = 12$.

Das gesuchte Volumen berechnet man aus :

$$V = \pi \cdot \int_0^{\frac{11}{2}} 4 + \frac{1}{3} y^2 dy = \pi \cdot \left(4y + \frac{y^3}{9} \right) \Big|_0^{\frac{11}{2}} = \pi \cdot \left(\frac{44}{2} + \frac{1331}{72} \right) = \frac{2915}{72} \cdot \pi \approx 127,19 \text{ cm}^3.$$

b) Für den um 1cm gesunkenen Wasserspiegel setzt man neue Grenzen ein und berechnet:

$$V = \pi \cdot \int_0^{\frac{9}{2}} 4 + \frac{1}{3} y^2 dy = \pi \cdot \left(4y + \frac{y^3}{9} \right) \Big|_0^{\frac{9}{2}} = \frac{225}{8} \cdot \pi = 88,6 \text{ cm}^3, \text{ womit in einer Woche ca. } 38,83 \text{ cm}^3 \text{ Wasser verdunstet}$$

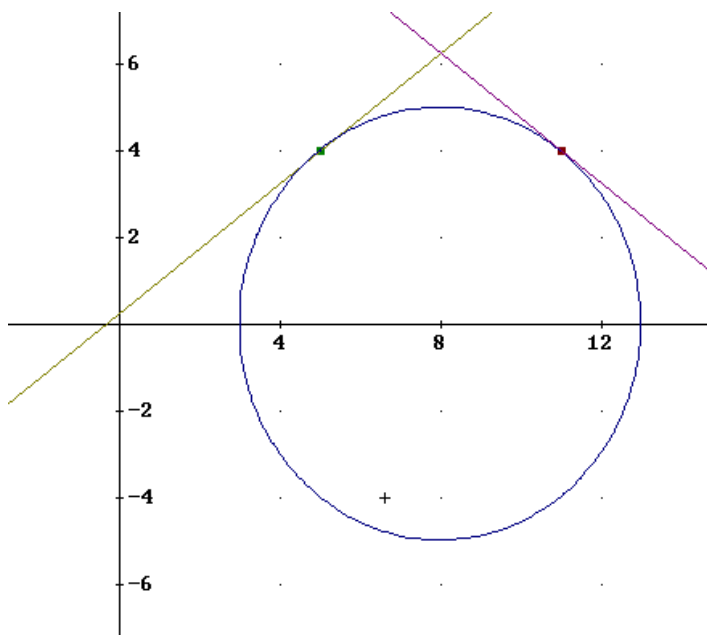
sind!

3)

a) Für den Mittelpunkt M gilt: $M(x, 0)$. Da P auf g liegt, gilt $P(5, 4)$. Da g Tangente an den Kreis ist, muss M auf der Normalen auf g durch P liegen. Diese Normale hat die Gleichung $n: 4x + 3y = 32$. Da $y=0$ gilt, muss $x=8$ sein, der Mittelpunkt hat daher die Koordinaten $M(8, 0)$. Der Kreisradius ist die Länge des Vektors MP. Sie beträgt 5. Die Kreisgleichung lautet daher: $k: (x-8)^2 + y^2 = 25$.

b) Die Gerade h hat die Steigung $k = -\frac{3}{4}$ und $d = \frac{49}{4}$. Setzt man diese Größen zusammen mit M und r in die Berührbedingung ein, erhält man: $(-\frac{3}{4} \cdot 8 - 0 + \frac{49}{4})^2 = 25 \cdot (1 + \frac{9}{16})$ und damit eine wahre Aussage. Den Berührpunkt T bestimmt man am einfachsten, indem man h mit einer Normalen n_1 auf h durch M schneidet. n_1 hat die Gleichung: $n_1: -4x + 3y = -32$. Als Schnittpunkt erhält man $T(11, 4)$.

Die folgende Skizze veranschaulicht die Lage von Kreis, Tangenten und des Berührpunkts T:



d) Den Schnittpunkt von g und h berechnet man als $S(8, \frac{25}{4})$.

e)

f)

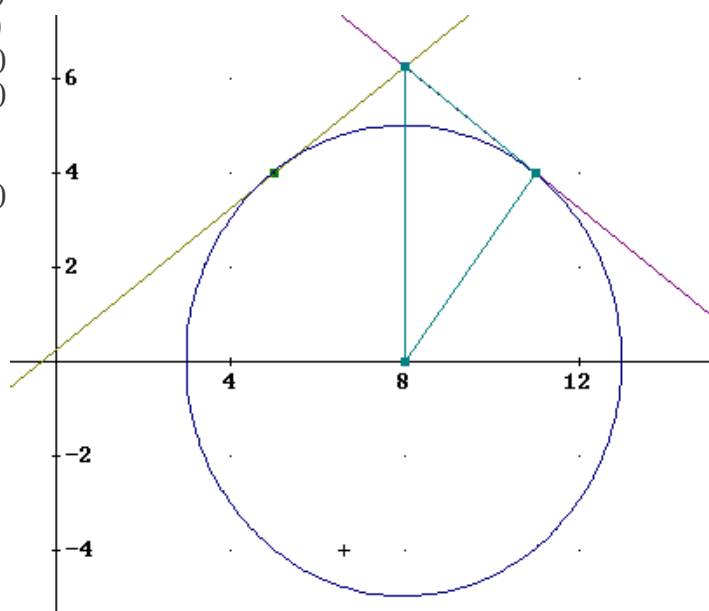
g)

h)

i)

j)

k)



Das Dreieck MTS ist, wie aus der Skizze erkennbar, rechtwinklig. Seine Fläche erhält man als

$$A = \frac{1}{2} \cdot |TS| \cdot |TM| = \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{4} \cdot 5 = \frac{75}{8} = 9,375 \text{ Flächeneinheiten.}$$

4)

- a) $P(\text{höchstens 2 verdorbene Eier}) = P(0) + P(1) + P(2) = 0,2059 + 0,3432 + 0,2669 = 0,8159.$
- b) $P(\text{mindestens 1 verdorbenes Ei}) = 1 - P(\text{alle in Ordnung}) = 1 - 0,2059 = 0,7941.$
- c) Um zu „beweisen“, dass der Anteil verdorbener Eier höher als 10% liegt, testet man:
- d) $H_0: p \leq 0,1$ gegen $H_1: p > 0,1$. Wegen $E(x) = 15$ und einer Standardabweichung von $3,6742 > 3$ kann man mittels Normalverteilung approximieren..

Man ermittelt den kritischen Wert als $x_k = 15 + 1,645 \cdot 3,6742 = 21,04$. Da der Anteil in der Stichprobe unterhalb des kritischen Werts liegt, kann H_0 nicht verworfen werden. Es ist keine Aussage möglich. Man kann dem Händler weder besonders gute noch besonders schlechte Qualität unterstellen!