2.Schularbeit

8A 28.1.2005

1) Die Funktion $f(x) = x^2 + x - 6$ wird bei $x=2$ von der Funktion $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ berührt. g(x) besitzt außerdem bei $x=4$ einen Extremwert.

a) Bestimme aus diesen Angaben die Gleichung der Funktion g(x)!
b) Führe für beide Funktionen einen vollständige Kurvenuntersuchung durch (Nullstellen, Lage und Art der Extremwerte, Wendepunkte) und zeichne beide Funktionen in ein Koordinatensystem!
c) Bestimme die Gleichung der gemeinsamen Tangente!
d) Die beiden Funktionen legen gemeinsam mit der y-Achse ein Flächenstück fest. Bestimme seinen Flächeninhalt!

2) Gegeben ist die Hyperbel mit der Gleichung $3x^2 - y^2 = 27$.
Durch den Hyperbelpunkt $P(x>0, 6)$ geht ein Kreis mit dem Mittelpunkt M(0, 8). Ermittle die Gleichung des Kreises und zeige, dass er die Hyperbel im Punkt P berührt!

3) Die Form eines Waschbeckens kann recht gut durch eine um die negative y-Achse rotierende Ellipse mit der Gleichung
$9x^2 + 25y^2 = 5625$ beschrieben werden. David Dusel, ein wasserscheuer Knirps von 5 Jahren, lässt das Wasser nie mehr als 5cm hoch ein.

a) Wieviel Liter Wasser benötigt David für sein „Waschritual“?
b) Wenn David aber dann sein Entchen schwimmen lässt, muss das Becken bis 1cm unter den oberen Rand gefüllt sein. Wieviel Liter Wasser muss David dazufließen lassen?

4) Polizeilichen Statistiken zufolge beträgt der Anteil der „Gurtenmuffel“ auf Österreichs Straßen noch immer beachtliche 15%. Inspektor Kleinlich, selbst begeisterter Autofahrer (allerdings stets mit Gurt!), steht gelangweilt an der B85 und beobachtet den Verkehr. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 12 zufällig vorbeifahrenden Autos

a)mindestens zwei b) genau vier c) mehr als 10

von einem Gurtenmuffel gelenkt werden?

d) Beschreibe in Worten, welches „Auswahlmodell“ dieser Fragestellung zugrunde liegt und begründe es!

[1)a)3P. b)3P c) 1P. d)2P. 2) 4P. 3)a) 3P. b) 3P. 4)a) 2P. b) 1P. c) 1P. d) 1 P.]

Lösungen:

1) a) Aus der Gleichung von f(x) bestimmt man die Nullstellen $N_1(-3, 0)$ sowie $N_2(2, 0)$. Wegen $f'(x) = 2x + 1$ liegt bei $E(-^1/_2, -^{25}/_4)$ ein Extremwert vor, der aufgrund von $f''(x)=2>0$ ein lokales Minimum ist. f(x) besitzt keine Wendepunkte.

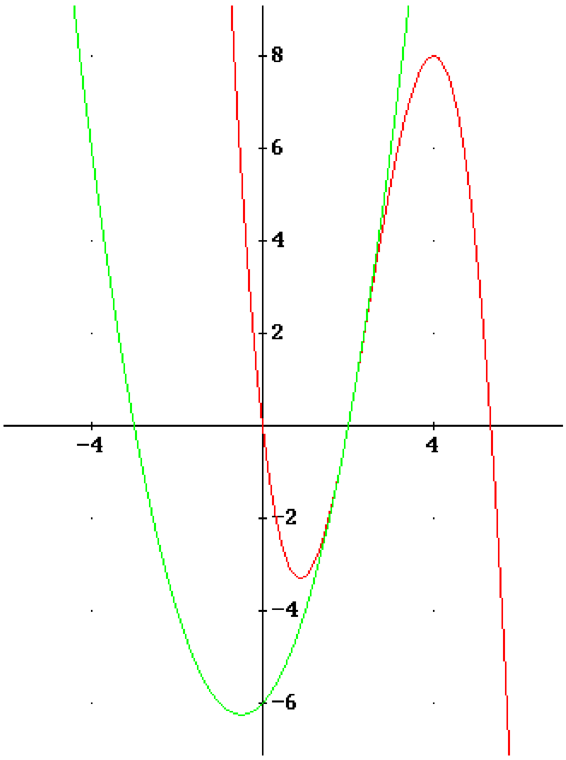
Für die Funktion g(x) muss gelten: $g(2)=0$ $g'(2) = f'(2) = 5$ sowie $g'(4)=0$. Aus diesen Bedingungen erhält man in der genannten Reihenfolge die folgenden Gleichungen:

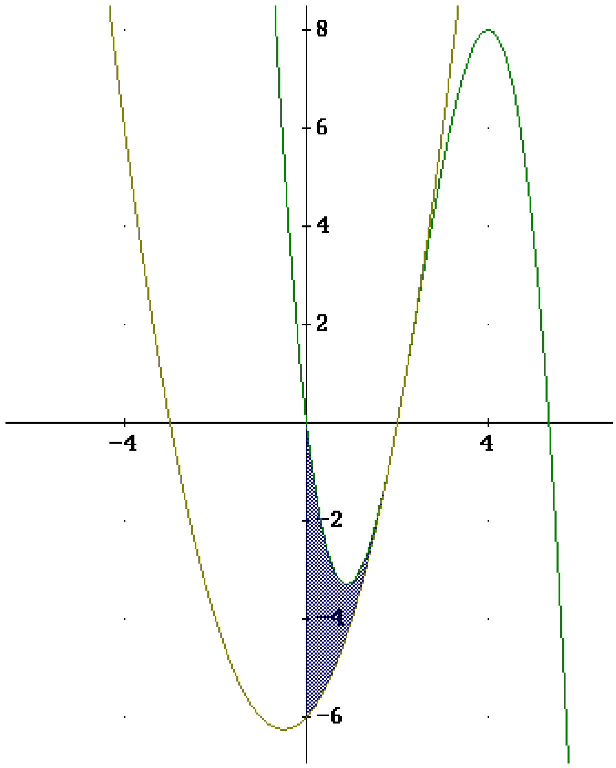
$8a + 4b + 2c = 0$, $12a + 4b + c = 5$, $48a + 8b + c = 0$, woraus man $a=-^3/_4$, $b= ^{11}/_2$ und $c= -8$ berechnet.

Die Gleichung von g(x) lautet daher: $g(x) = -\,^3/_4x^3 + ^{11}/_2\, x^2 - 8x$.

b) g(x) hat die Nullstellen $N_1(0, 0)$, $N_2(2, 0)$ und $N_3(^{16}/_3, 0)$.

Wegen $g'(x) = -^9/_4\, x^2 + 11x - 8$ erhält man Punkte mit waagrechter Tangente bei $E_1(^8/_9, -^{800}/_{243})$ und $E_2(4, 8)$. Wegen $g''(x) = -^9/_2\, x + 11$ ist E_1 ein lokales Minimum und E_2 ein lokales Maximum. g(x) besitzt in $W(^{22}/_9, ^{572}/_{243})$ einen Wendepunkt! Die folgende Skizze veranschaulicht die Lage der beiden Funktionen:





c) Die Gleichung der gemeinsamen Tangente lautet: $y=5x - 10$.

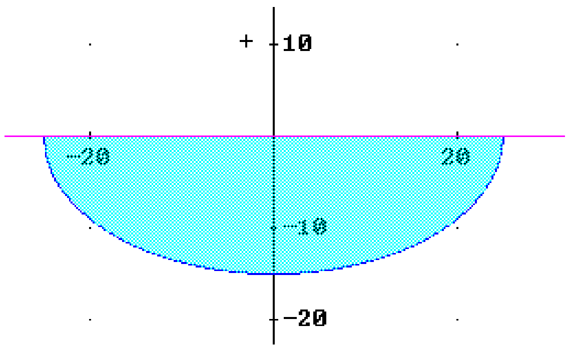
d) Die gesuchte Fläche erhält man als

$$\int_0^2 g(x) - f(x)dx = \int_0^2 -\frac{3}{4}x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 9x + 6dx = -\frac{3}{16}x^4 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x\Big|_0^2 = 3$$

2) Setzt man P in die Hyperbel ein, erhält man $P(\sqrt{21}, 6)$. Aus der Hyperbelgleichung entnimmt man $a^2=9$ und $b^2=27$. Die Gleichung der Tangente an die Hyperbel in P lautet daher t: $27\cdot\sqrt{21}\,x-54y=243$ oder $\sqrt{21}\,x-2y=9$.

Da der Kreisradius gerade die Länge des Vektors MP ist, erhält man für die Kreisgleichung k: $x^2 + (y-8)^2 = 25$. Für die Kreistangente in P ermittelt man : t_k: $\sqrt{21}\,x + (y-8)\cdot(-2)=25$ oder $\sqrt{21}\,x-2y=9$. Die beiden Kurven haben daher in P eine gemeinsame Tangente, sie berühren daher einander in P.

3) a) Die folgende Skizze veranschaulicht die Gestalt des Waschbeckens:



a) Das gesuchte Volumen berechnet man aus dem Integral:

$$\pi \cdot \int_{-15}^{-10} 625 - \frac{25}{9} y^2 dy = 625y - \frac{25}{27} y^3 \Big|_{-15}^{-10} \pi \cdot \left(-\frac{143750}{27} + 6250 \right) = \frac{25000}{27} \cdot \pi$$ und damit als ca. 2908cm^3 oder ca.2,9 Liter.

b) Für das „Schiffchen“ gelten entsprechend andere Grenzen. Man erhält:

$$\pi \cdot \int_{-15}^{-1} 625 - \frac{25}{9} y^2 dy = 625y - \frac{25}{27} y^3 \Big|_{-15}^{-1} \pi \cdot \left(-\frac{16850}{27} + 6250 \right) = \frac{151900}{27} \cdot \pi$$ und damit als ca.17674,36cm^3 oder ca.17,67 Liter. David muss also ca. 14,77 Liter dazufließen lassen.

4) a) P(mindestens 2) = 1-(P(0) + P(1)) = 1- (0,14224 + 0,3012) = 0,5565.
b)P(genau 4) = 0,0683.
c) P(mehr als 10)= P(11) + P(12) = 0,0000000088 + 0,00000000013 = 0,00000000895.