

1. Schularbeit

8A / Gruppe A

19.11.2004

1) Bei Gocart Rennen hängt vieles von einem guten Finish ab. Nimm dazu folgende Situation an: Tina Turbo kommt ca. 5m hinter Max Meister aus der letzten Kurve. Beide beschleunigen gleichzeitig, Max hat noch 45m bis ins Ziel. Max fährt am Beginn mit ca. $6 \frac{m}{s}$, Tina mit ca. $7 \frac{m}{s}$. Für Max gilt in diesem Bereich die Geschwindigkeitsfunktion $v_M(t) = v_0 + 2,5 \cdot t$, für Tina $v_T(t) = v_0 + 3 \cdot t$.

- Nach wie viel Sekunden fahren Max bzw. Tina über die Ziellinie?
- Welche Geschwindigkeit hat Tina auf der Ziellinie, welche Max?
- Zeige, dass Tina das Rennen gewinnt! Wie groß ist ihr Vorsprung in Meter auf den Zweiten?
- Wieviel Meter Vorsprung hätte Max in der letzten Kurve benötigt, um das Rennen zu gewinnen?

2) Funktionen des Typs $f(x) = x \cdot e^{ax}$ mit $a \neq 0$ besitzen genau einen Extremwert und einen Wendepunkt.

- Zeige die Richtigkeit dieser Aussage und berechne allgemein die Koordinaten dieser Punkte! Wann handelt sich beim Extremwert um ein Maximum, wann um ein Minimum?
- Bestimme die Konstante a so, dass $f(x)$ bei $x=2$ einen Extremwert hat! Berechne für diese konkrete Funktion auch die Koordinaten des Wendepunkts!
- Skizziere den Verlauf der Funktion möglichst genau. Wie verhält sich $f(x)$ für $x \rightarrow \infty$?

3) Gegeben sind die Funktionen $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x$ und $g(x) = x^2 - \frac{3}{2}x$

- Bestimme für beide Funktionen Lage und Art der Extremwerte sowie allfällige Wendepunkte! Begründe dabei genau die einzelnen Rechenschritte!
- Skizziere den Verlauf der beiden Funktionen möglichst genau!
- Berechne die gemeinsame Fläche, die von den beiden Funktionen aufgespannt wird!

[1)a)2P. b)1P c)2P. d)1P. 2) a)4P. b)2P. c) 2P 3)a) 4P. b) 1P. c) 3P.]

1. Schularbeit

8A / Gruppe B

19.11.2004

1) Bei Formel 1 Rennen hängt vieles von einem guten Finish ab. Nimm dazu folgende Situation an: J. P. Montoya kommt ca. 25m vor M. Schumacher aus der letzten Kurve. Beide beschleunigen gleichzeitig, Montoya hat noch 300m bis ins Ziel. Montoya fährt am Beginn mit ca. $32 \frac{m}{s}$, Schumacher mit ca. $34 \frac{m}{s}$. Für Montoya gilt in diesem Bereich die Geschwindigkeitsfunktion $v_M(t) = v_0 + 7,5 \cdot t$, für Schumacher $v_S(t) = v_0 + 8,5 \cdot t$.

- Nach wie viel Sekunden fahren Schumacher bzw. Montoya über die Ziellinie?
- Welche Geschwindigkeit hat Montoya auf der Ziellinie, welche M. Schumacher?
- Zeige, dass Michael das Rennen gewinnt! Wie groß ist sein Vorsprung in Meter auf den Zweiten?
- Wieviel Meter Vorsprung hätte Montoya in der letzten Kurve benötigt, um das Rennen zu gewinnen?

2) Funktionen des Typs $f(x) = x \cdot e^{x+a}$ besitzen alle bei $x = -1$ einen Extremwert und bei $x = -2$ einen Wendepunkt.

- Zeige die Richtigkeit dieser Aussage und berechne allgemein die Koordinaten dieser Punkte! Wann handelt sich beim Extremwert um ein Maximum, wann um ein Minimum?
- Bestimme die Konstante a so, dass $f(x)$ bei in $E(-1, -\sqrt{e})$ einen Extremwert hat! Berechne für diese konkrete Funktion auch die Koordinaten des Wendepunkts!
- Skizziere den Verlauf der Funktion möglichst genau. Wie verhält sich $f(x)$ für $x \rightarrow \infty$?

3) Gegeben sind die Funktionen $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x$ und $g(x) = -x^2 + \frac{1}{2}x$

- Bestimme für beide Funktionen Lage und Art der Extremwerte sowie allfällige Wendepunkte! Begründe dabei genau die einzelnen Rechenschritte!
- Skizziere den Verlauf der beiden Funktionen möglichst genau!
- Berechne die gemeinsame Fläche, die von den beiden Funktionen aufgespannt wird!

[1)a)2P. b)1P c)2P. d)1P. 2) a)4P. b)2P. c) 2P 3)a) 4P. b) 1P. c) 3P.]

Lösungen Gruppe A:

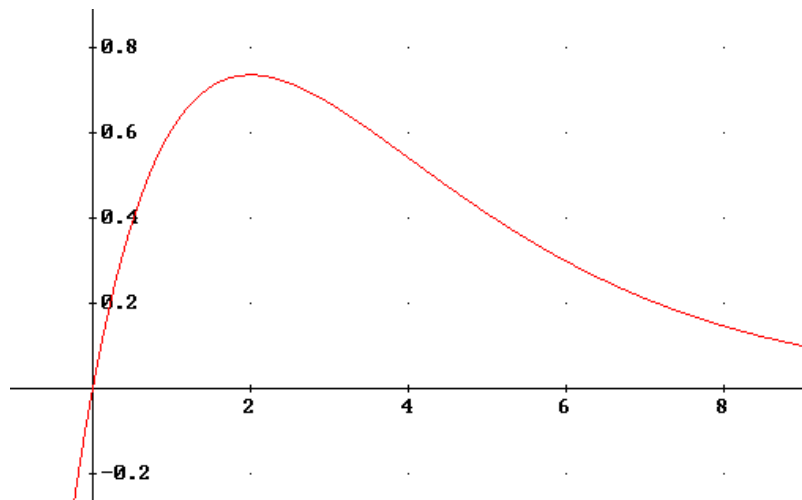
1) Beachte bei der Lösung des Beispiels: beide Fahrer beschleunigen gleichzeitig, Tina kommt mit höherer Geschwindigkeit aus der Kurve und beschleunigt besser!

- Die Zeit, die Max bis ins Ziel benötigt, errechnet man aus seiner Wegfunktion $s_M(t) = 6t + 1,25t^2$, die eine Stammfunktion von $v_M(t)$ ist. Man setzt $s_M(t) = 45$ und berechnet daraus $t = 4,06$ Sekunden. Für Tina gilt entsprechend: $s_T(t) = 7t + 1,5t^2$, die eine Stammfunktion von $v_T(t)$ ist. Man setzt $s_T(t) = 50$ (Rückstand!) und berechnet daraus $t = 3,89$ Sekunden. Tina ist also aufgrund seiner besseren Beschleunigung und der höheren Anfangsgeschwindigkeit schneller im Ziel!
- Die Geschwindigkeit auf der Ziellinie berechnet man durch Einsetzen der Zeitwerte in die Geschwindigkeitsfunktionen. Man erhält für Max $v_M = 16,16 \text{ m/s}$ oder ca. $58,15 \text{ km/h}$, für Tina berechnet man $v_S = 18,68 \text{ m/s}$ oder ca. $67,25 \text{ km/h}$.
- Tina gewinnt das Rennen um ca. 0,17 Sekunden aufgrund der Rechnung in a). Ihr Vorsprung auf den Zweiten lässt sich folgend berechnen: Tina benötigt 3,89 Sekunden ins Ziel. In dieser Zeit ist sie 50m (inklusive der 5m Rückstand!) gefahren. Max hat in dieser Zeit (Einsetzen in seine Wegfunktion lediglich 42,32m zurückgelegt (von den 45m, die er ins Ziel hatte). Das heißt, dass Max ca. 2,68m von der Ziellinie noch entfernt war, als Tina diese passierte.
- Max benötigt laut a) 4,06 Sekunden bis ins Ziel. In dieser Zeit fährt Tina (setze in ihre Wegfunktion ein) 53,18m, d.h. der Vorsprung hätte mehr als 8,18m betragen müssen!

2) a) Für die Funktion bestimmt man die erste Ableitung $f'(x) = e^{ax} \cdot (ax+1)$. Da $e^{ax} \neq 0$ gilt, ist $x = -1/a$ die einzige Lösung. Bei $E(-1/a, -1/ae)$ liegt eine waagrechte Tangente vor. Für $f''(x)$ berechnet man: $f''(x) = a \cdot e^{ax} \cdot (ax+2)$ und daraus den Wendepunkt bei $W(-2/a, -2/ae^2)$. Da $f''(-1/a) = a/e$ ist, handelt es sich bei $a > 0$ um ein Minimum, bei $a < 0$ um ein Maximum.

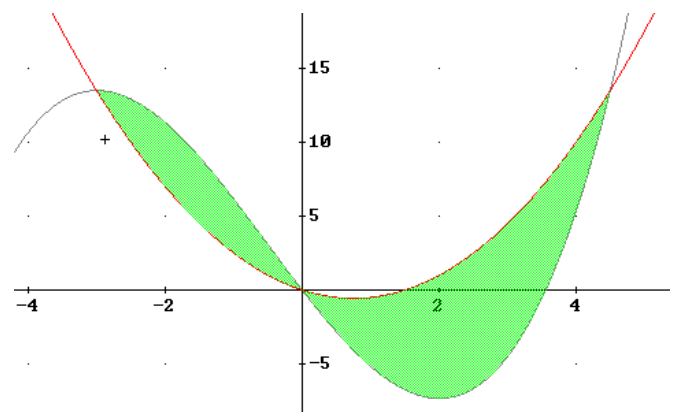
b) Wenn bei $x=2$ ein Extremwert vorliegen soll, muss gelten: $f'(2) = 0$. Da wir aus a) bereits die Koordinaten von E kennen, nämlich $E(-1/a, -1/ae)$, muß $-1/a=2$ sein und $a = -1/2$. Der Extremwert liegt also bei $E(2, 2/e)$, der Wendepunkt bei $W(4, 4/e^2)$.

c) Die folgende Graphik veranschaulicht den Verlauf der Funktion:



3) Für $f'(x)$ erhält man: $f'(x) = x^2 + x - 6$ und daher $E_1(-3, 27/2)$ und $E_2(2, -22/3)$. E_1 ist Max, E_2 ist Min. Wendepunkt bei $W(-1/2, 37/12)$. $g(x)$ hat ein Min bei $(3/4, -9/16)$. Die Flächengrenzen bestimmt man durch Gleichsetzen der Funktionen. Man erhält:

$x_1 = -3$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 9/2$. Die folgende Graphik veranschaulicht die Lage der Flächenstücke. Man erhält für die linke Teilfläche $A_1 = 9E^2$, für die rechte Teilfläche $A_2 = 26,58E^2$ und damit eine Gesamtfläche von $A = 35,58E^2$.



Lösungen Gruppe B:

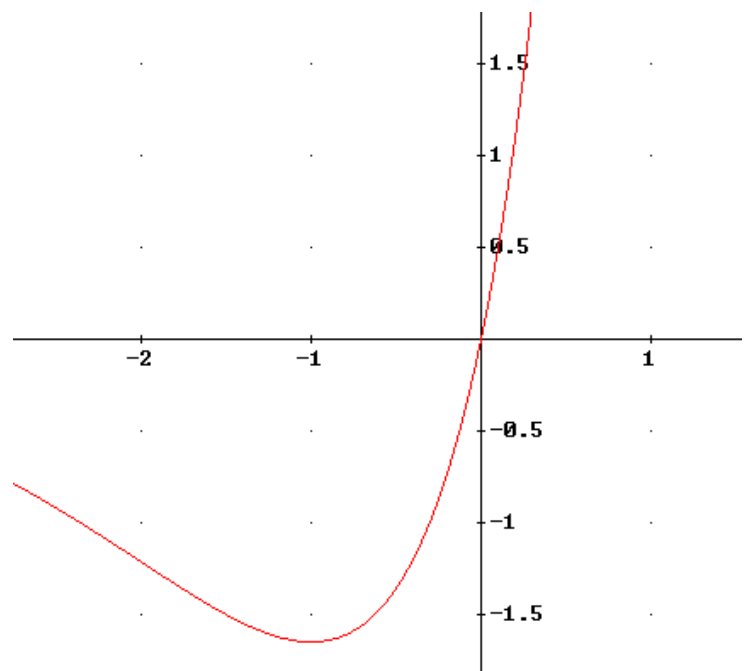
1) Beachte bei der Lösung des Beispiels: beide Fahrer beschleunigen gleichzeitig, M. Schumachers roter Renner kommt mit höherer Geschwindigkeit aus der Kurve und beschleunigt besser!

- Die Zeit, die Montoya bis ins Ziel benötigt, errechnet man aus seiner Wegfunktion $s_M(t) = 32t + 3,75t^2$, die eine Stammfunktion von $v_M(t)$ ist. Man setzt $s_M(t) = 300$ und berechnet daraus $t = 5,64$ Sekunden. Für Schumacher gilt entsprechend: $s_S(t) = 34t + \frac{17}{4}t^2$, die eine Stammfunktion von $v_S(t)$ ist. Man setzt $s_S(t) = 325$ (Rückstand!) und berechnet daraus $t = 5,61$ Sekunden. Schumacher ist also aufgrund seiner besseren Beschleunigung und der höheren Anfangsgeschwindigkeit schneller im Ziel!
- Die Geschwindigkeit auf der Ziellinie berechnet man durch Einsetzen der Zeitwerte in die Geschwindigkeitsfunktionen. Man erhält für Montoya $v_M = 74,32 \frac{m}{s}$ oder ca. $267,56 \frac{km}{h}$. für Schumacher berechnet man $v_S = 81,74 \frac{m}{s}$ oder ca. $294,25 \frac{km}{h}$.
- M. Schumacher gewinnt das Rennen um ca. 0,03 Sekunden aufgrund der Rechnung in a). Sein Vorsprung auf den Zweiten lässt sich folgend berechnen: Schumacher benötigt 5,61 Sekunden ins Ziel. In dieser Zeit ist er 325m (inklusive der 25m Rückstand!) gefahren. Montoya hat in dieser Zeit (Einsetzen in seine Wegfunktion lediglich 297,99m zurückgelegt (von den 300m, die er ins Ziel hatte). Das heißt, dass Montoya ca. 2m von der Ziellinie noch entfernt war, als Schumacher diese passierte.
- Montoya benötigt laut a) 5,64 Sekunden bis ins Ziel. In dieser Zeit fährt Schumacher (setze in seine Wegfunktion ein) 327,2m, d.h. der Vorsprung hätte mehr als 27,2m betragen müssen!

2) a) Für die Funktion bestimmt man die erste Ableitung $f'(x) = e^{x+a} \cdot (x+1)$. Da $e^{x+a} \neq 0$ gilt, ist $x = -1$ die einzige Lösung. Bei $E(-1, -e^{a-1})$ liegt eine waagrechte Tangente vor. Für $f''(x)$ berechnet man: $f''(x) = e^{x+a} \cdot (x+2)$ und daraus den Wendepunkt bei $W(-2, -2e^{a-2})$. Da $f''(-1) = e^{a-1}$ stets positiv ist, handelt es sich bei immer um ein lokales Minimum.

b) Wenn bei $E(-1, -\sqrt{e})$ ein Extremwert vorliegen soll, muss gelten: $-e^{a-1} = -\sqrt{e}$ und damit $a-1 = \frac{1}{2}$. Für a erhält man daher $a = \frac{3}{2}$. Der Wendepunkt liegt bei $W(-2, -\frac{2}{\sqrt{e}})$.

c) Die folgende Graphik veranschaulicht den Verlauf der Funktion:



3) Für $f'(x)$ erhält man: $f'(x) = x^2 - 3x - 4$ und daher $E_1(-1, \frac{13}{6})$ und $E_2(4, -\frac{56}{3})$. E_1 ist Max, E_2 ist Min.

Wendepunkt bei $W(\frac{3}{2}, -\frac{33}{4})$. $g(x)$ hat ein Max bei $(\frac{1}{4}, \frac{1}{16})$. Die Flächengrenzen bestimmt man durch Gleichsetzen der Funktionen. Man erhält:

$x_1 = -3$, $x_2 = 0$ und $x_3 = \frac{9}{2}$. Die folgende Graphik veranschaulicht die Lage der Flächenstücke. Man erhält für die linke Teilfläche $A_1 = 9E^2$, für die rechte Teilfläche $A_2 = 26,58E^2$ und damit eine Gesamtfläche von $A = 35,58E^2$.

