4. Schularbeit

7C 25. 5.2005

1) Die Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ hat bei $x = 0$ die Tangentensteigung $k_t = -2$ und besitzt in E (2, -4) einen Extremwert.

a) Bestimme die Gleichung der Funktion!
b) Bestimme die Lage aller Extremwerte sowie den Wendepunkt!
c) Skizziere den Verlauf der Funktion!

2) Bestimme Lage und Art der Extremwerte der Funktion $f(x) = \frac{8x}{x^2+1}$!

3) Gegeben sind die Hyperbel hyp: $x^2 - y^2 = 9$ und die Gerade g: $x + 2y = -3$

a) Bestimme die Koordinaten der Brennpunkte der Hyperbel!
b) Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte von Hyperbel und Geraden!
c) Stelle die Gleichung der Tangente t_1 an die Hyperbel im Schnittpunkt S_1 mit der positiven x-Koordinate auf!

Die Funktion $f(x) = -\,{}^3/_8\, x^2 + 2x$ wird im Punkt P(4, y) von einer Ellipse berührt!

a) Bestimme die Gleichung dieser Ellipse sowie die Gleichung der gemeinsamen Tangente in P!
b) Skizziere den Verlauf der beiden Kurven!

[1) a)3P. b)3P. c) 2P. 2) 4P. 3) a) 1P. b)2P. c)1P. 4)a) 4P. b) 2P.]

Lösungen:

1)a) Die Bedingungen lauten:

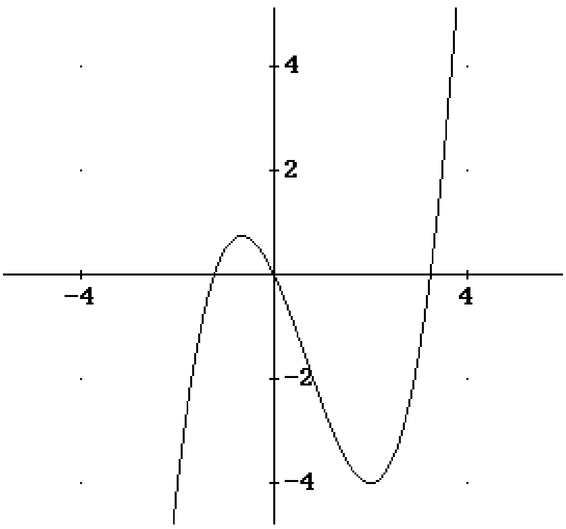
f ’(0) = -2, f ’(2) = 0, f(2) = -4. Daraus bestimmt man die Gleichungen:

c=-2, 12a + 4b + c = 0 sowie 8a + 4b + 2c = -4

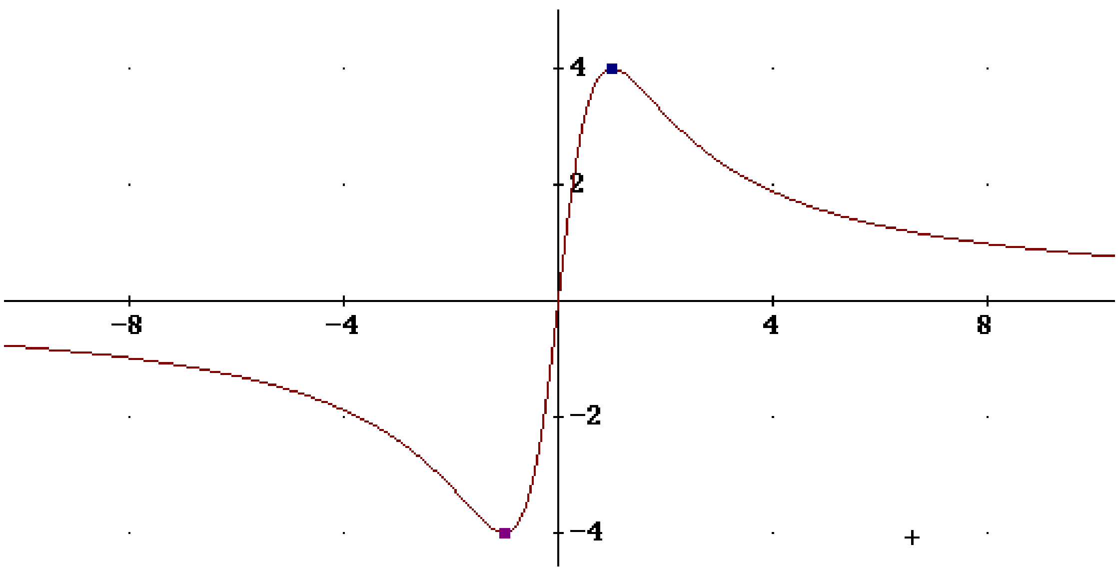
Als Lösung ergibt sich: a= $^1/_2$, b=-1 und c=-2, die Funktion lautet daher: f(x) = $^1/_2\, x^3 - x^2 - 2x$.

b) Wegen f ’’(x) = $^3/_2\, x^2 - 2x - 2$ erhält man Punkte mit waagrechter Tangente bei x_1=2 und x_2= $-^2/_3$. Wegen f ’’(x) = 3x – 2 liegt bei W($^2/_3$, $-^{44}/_{27}$) ein Wendepunkt vor. f ’’(2) =4>0, daher ist E_1(2, -4) ein lokales Minimum, E_2($-^2/_3$, $^{20}/_{27}$) ein lokales Maximum.

c) Die folgende Skizze zeigt den Verlauf der Funktion:



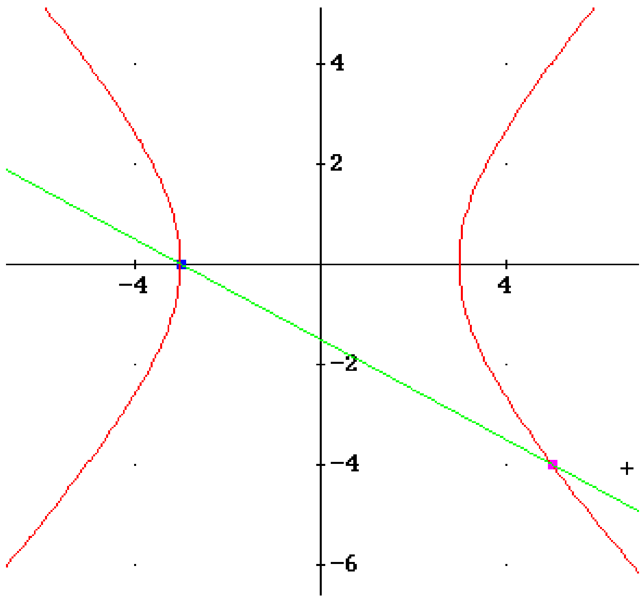
2) Für f ’(x) erhält man f ’(x) = $\dfrac{8\cdot\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$ und damit waagrechte Tangenten bei x_1= 1 und x_2= -1. Wegen f ’’(x) = $\dfrac{16x\cdot\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$ gilt: f ’’(1) = -4<0, es liegt daher bei E_1(1, 4) ein lokales Maximum vor. f ’’(-1) = 4, bei E_2(-1, -4) liegt daher ein lokales Minimum vor. Die folgende Skizze veranschaulicht den Verlauf der Funktion:



3)a) Aus der Hyperbelgleichung entnimmt man $a^2 = 9$ und $b^2 = 9$, die Brennpunkte lauten $F_1(3\cdot\sqrt{2}, 0)$ und $F_2(-3\cdot\sqrt{2}, 0)$.

b) Für die Schnittpunkte erhält man $S_1(5, -4)$ und $S_2(-3, 0)$.

c) Die Gleichung der Tangente in S_1 lautet: $45x + 36y = 81$ oder $5x + 4y = 9$



4) a) Man bestimmt P(4, 2) auf f(x). $f'(x) = -{}^3/_4\, x + 2$ und $f'(4) = -1$. Die Gleichung der Tangente in P lautet daher: t: $y = -x + 6$.

t ist auch Tangente an die Ellipse und erfüllt daher die Berührbedingung, ebenso liegt P auf der Ellipse.

Es gilt daher $a^2 + b^2 = 36$ und $16b^2 + 4a^2 = a^2 \cdot b^2$. Daraus berechnet man: $a^2 = 24$ und $b^2 = 12$. Die Ellipse hat daher die Gleichung $12x^2 + 24y^2 = 288$ oder $x^2 + 2y^2 = 24$.

b) Die folgende Skizze veranschaulicht den Verlauf der beiden Kurven: