3. Schularbeit

7C 15.3.2005

1) Ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M(0, 5) und dem Radius r= $\sqrt{40}$ wird von der Geraden g: x + y= 1 in S_1 und S_2 geschnitten.
   a) Berechne die Koordinaten der beiden Schnittpunkte!
   b) Stelle die Gleichungen der Kreistangenten in den beiden Schnittpunkten auf und berechne ihren Schnittpunkt S_3!
   c) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks $S_1S_2S_3$!

2) Eine Hyperbel hat den Brennpunkt $F_1(\sqrt{7}, 0)$ und geht durch $P(2 \cdot \sqrt{3}, 5)$.
   a) Bestimme die Gleichung der Hyperbel!
   b) Zeige, dass g: $5x - \sqrt{5}\, y = 5$ eine Tangente an die Hyperbel ist!
   c) Bestimme die Gleichung einer Ellipse, die den Hauptscheitel $A(\sqrt{12}, 0)$ hat und mit der Hyperbel den Brennpunkt gemeinsam hat!

3) Die Funktion $f(x) = \frac{4-x}{x^2}$ wird in P(2, y>0) von einer Funktion $g(x) = ax^2 + b$ rechtwinklig geschnitten.
   a) Bestimme die Gleichung der Funktion g(x)!
   b) Skizziere den Verlauf beider Kurven im Koordinatensystem!

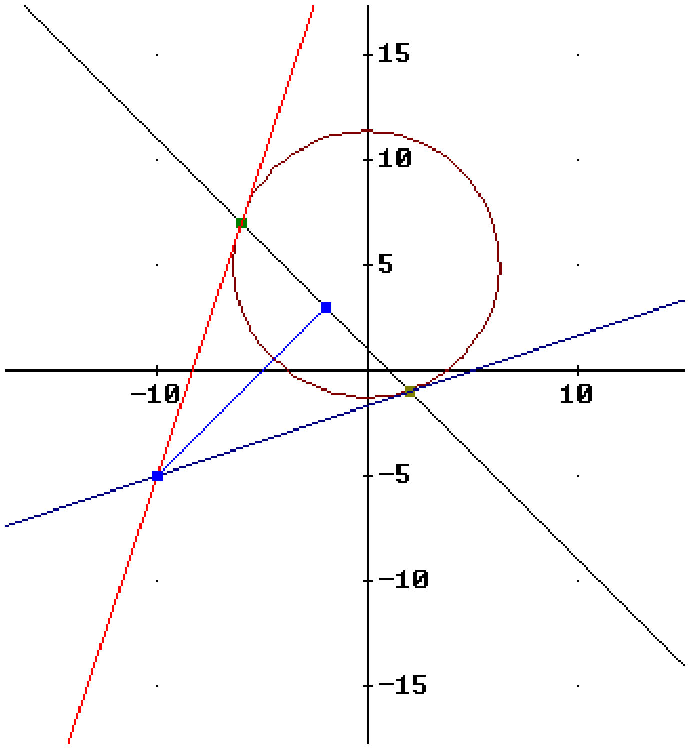
[1) a)3P. b)2P. c) 2P. 2) a)3P. b)1P. c)1P. 3)a) 4P. b) 2P.]

Lösungen:

1) a) Die Kreisgleichung lautet: k: $x^2 + (y-5)^2 = 40$. Schneidet man k mit g, erhält man als Schnittpunkte $S_1(2, -1)$ und $S_2(-6, 7)$.

b) Die Gleichungen der beiden Kreistangenten ergeben sich als: t_1 $x - 3y = 5$ bzw. t_2: $-3x + y = 25$. Ihr Schnittpunkt ist $S_3(-10, -5)$.

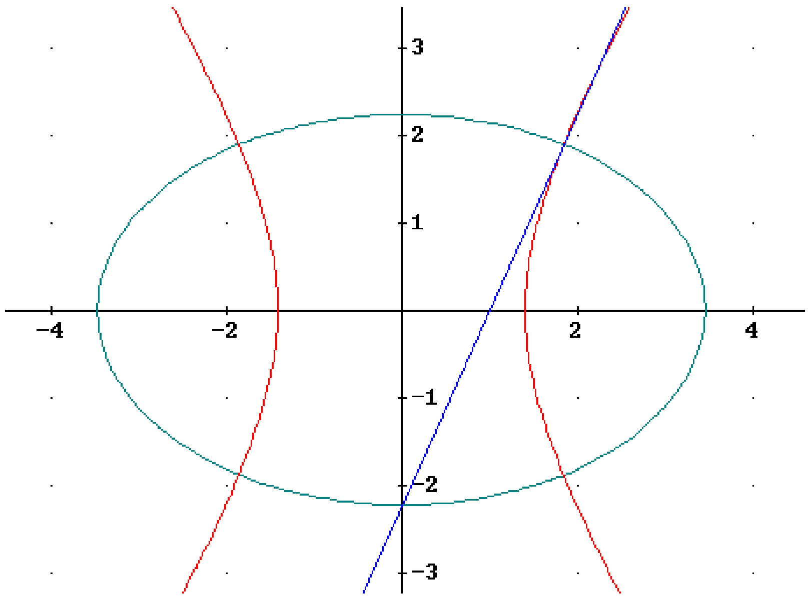
c) Da das Dreieck gleichschenklig ist, kann man die Höhe leicht berechnen, indem man die Gerade durch S_3 und M mit jener durch S_1 und S_2 schneidet . Man erhält: P(-, 3). Die Höhe beträgt $h=8\cdot\sqrt{2}$. Die Fläche des Dreiecks ergibt sich als A=64 Flächeneinheiten! Die folgende Skizze veranschaulicht die Lage von Kreis, Tangenten und Dreieck!



2) a) Aus dem gegebenen Brennpunkt entnimmt man $e^2=7$ und damit $a^2 + b^2 = 7$. Aus dem gegebenen Punkt erhält man durch Einsetzen in die Hyperbelgleichung: $12b^2 - 25a^2= a^2b^2$. Setzt man $b^2 = 7-a^2$ in die zweite Gleichung ein, erhält man: $a_1^2=42$ bzw. $a_2^2=2$. Wegen $b^2= 7- a^2$ kann a^2 nur 2 sein. Daher gilt $b^2= 5$. Die Hyperbel hat daher die Gleichung $5x^2 - 2y^2 = 10$.

b) Aus der Gleichung der Geraden bestimmt man $k=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$ und $d=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$. Einsetzen in die Berührbedingung liefert: $2\cdot5 - 5 = 5$ und damit eine wahre Aussage! Die folgende Skizze veranschaulicht die Lage von Hyperbel und Tangente:

Für die Ellipse muss gelten: $e^2= 7$ und $a^2= 12$. Daher ist $b^2= 5$. Die Ellipse hat daher die Gleichung: ell: $5x^2+ 12y^2 = 60$.



3) Für die erste Ableitung der Funktion f(x) erhält man: $f'(x) = \frac{x-8}{x^3}$ Für P berechnet man P(2, $^1/_2$). Wegen

f'(2) = - $^3/_4$ muss gelten:

g '(2) = $^4/_3$. Ebenso muss g(2)= ½ sein. Daraus berechnet man unmittelbar a=$^1/_3$ und b= - $^5/_6$. Die Gleichung von g(x) lautet daher: g(x) = $^1/_3x^2 - {}^5/_6$. Die folgende Skizze veranschaulicht die Lage der beiden Funktionen: