

1) Die Funktion $f(x) = \frac{ax^2 + b}{x+1}$ hat im Punkt $P(2, \frac{5}{3})$ die Tangentensteigung $k=1$.

- a) Bestimme aus diesen Angaben die Gleichung der Funktion sowie ihren Definitionsbereich!
- b) Bestimme allfällige Nullstellen sowie Lage und Art der Extremwerte dieser Funktion!
- c) Zeige durch Rechnung, weshalb $f(x)$ keine Wendepunkte haben kann!
- d) Skizziere den Verlauf der Funktion möglichst genau!

2) Die Funktion $f(x) = ax^4 + bx^2 + cx$ hat bei $x=1$ einen Wendepunkt. Die Gleichung der Tangente in $P(-1, y)$ lautet $t: 2x-y=1$.

- a) Bestimme aus den Angaben die Gleichung der Funktion!
- b) In welchem Punkt Q der Funktion verläuft die Tangente parallel zur Tangente t ?

3)a) Zeige, dass $f(x) = ax^3 - 12ax + a$ zwei zur x -Achse symmetrisch liegende Extremwerte sowie bei $x=0$ einen Wendepunkt hat, gleichgültig, welchen Wert a annimmt! Berechne die Koordinaten dieser Punkte!

b) Skizziere den Verlauf der Funktion für $a = -2$ und $a=2$!

4)a) Eine oben offene Regentonne soll die Form eines Zylinders haben und 300 Liter fassen. Welche Maße soll man der Tonne geben, damit zu ihrer Herstellung möglichst wenig Blech benötigt wird? Formuliere exakte Haupt- und Nebenbedingungen und interpretiere das Ergebnis!

b) Wie ändert sich das Ergebnis in a), wenn die Regentonne zur Verstärkung einen doppelten Boden erhalten soll?

[1) a)2P. b)3P. c) 1P. d) 2P. 2) a)3P. b)1P. 3)a) 4P. b) 2P. 3) a) 3P. b) 3P.]

Lösungen:

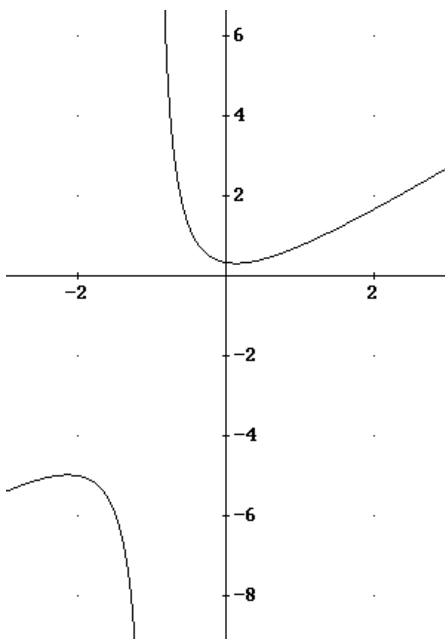
- 1) a) Man bestimmt $f'(x) = \frac{ax^2 + 2ax - b}{(x+1)^2}$. Es muss gelten: $f'(2)=1$ sowie $f(2) = \frac{5}{3}$. Setzt man die Werte in die Bedingungen ein, erhält man folgende Gleichungen: $8a-b=9$ bzw. $4a+b=5$, woraus man unmittelbar $a=\frac{7}{6}$ und $b=\frac{1}{3}$ entnehmen kann. Die Funktionsgleichung lautet daher: $f(x) = \frac{\frac{7}{6}x^2 + \frac{1}{3}}{x+1}$. Die Funktion besitzt bei $x=-1$ eine Polstelle mit vertikaler Asymptote, ihr Definitionsbereich ist daher: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

b und c) $f(x)$ hat keine Nullstellen. Setzt man $f'(x)=0$, erhält man die Gleichung:

$$\frac{7}{6}x^2 + \frac{7}{3}x - \frac{1}{3} = 0 \text{ und daraus } x_1 = -2,1338 \text{ sowie } x_2 = 0,1338 \text{ als Stellen mit waagrechter Tangente. Wegen}$$

$f''(x) = \frac{3}{(x+1)^3}$ kann $f(x)$ keinen Wendepunkt haben. Ebenso ist offensichtlich aufgrund des Vorzeichens, dass $E_1(-2,1338; -4,98)$ ein lokales Maximum, $E_2(0,1338; 0,31)$ ein lokales Minimum ist!

d) Die folgende Skizze zeigt den Verlauf der Funktion:

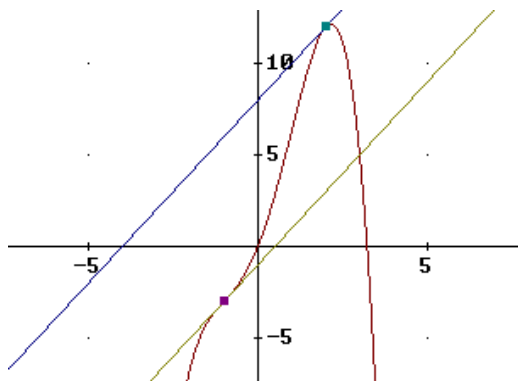


- 2) a) Man erhält P durch Einsetzen der Koordinaten in die Tangentengleichung. $P(-1, -3)$. Es muss gelten: $f(-1)=-3$, $f'(-1)=2$ und $f''(-1)=0$. Daraus erhält man folgende Gleichungen:

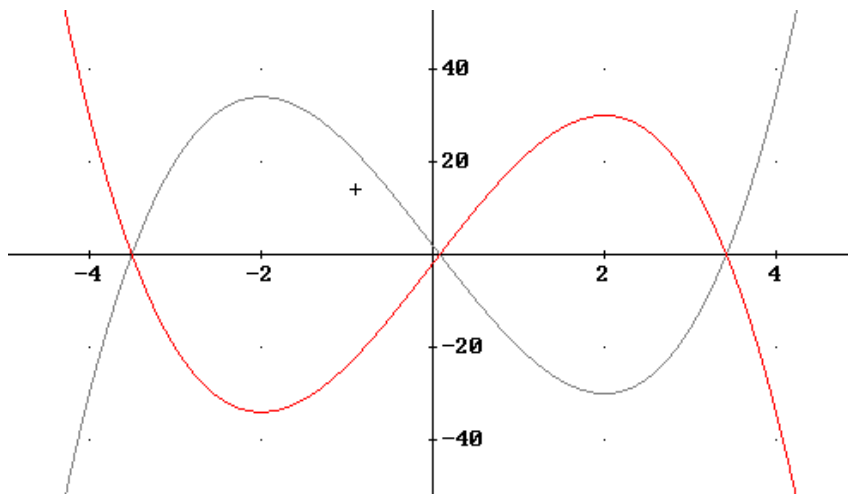
$a + b - c = -3$, $-4a - 2b + c = 2$ und $12a + 2b = 0$. Man berechnet daraus $a = -\frac{1}{3}$, $b=2$ und $c = \frac{14}{3}$.

Die Funktion hat daher die Gleichung: $f(x) = -\frac{1}{3}x^4 + 2x^2 + \frac{14}{3}x$.

- b) Um den zweiten Punkt mit $k=2$ zu berechnen, setzt man $f'(x) = 2$ und erhält daraus $x_1=-1$ und $x_2=2$. Daher hat $f(x)$ in $Q(2, 12)$ dieselbe Tangentensteigung wie in P. Die Gleichung der Tangente lautet: $t_Q: 2x - y = -8$. Funktion und beide Tangenten sind in der folgenden Skizze dargestellt:



- 3) a) Man bestimmt $f'(x) = 3ax^2 - 12a = 0$ und daraus erhält man $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ als Stellen mit waagrechtter Tangente. Wegen $f''(x) = 6ax = 0$ und $x=0$ liegt bei $W(0, a)$ ein Wendepunkt vor. $E_1(-2, 17a)$ und $E_2(2, -15a)$ sind Extremwerte.
- b) Die folgende Skizze zeigt den Verlauf der Funktionen:



- 4) a) Als Hauptbedingung formuliert man $O(r, h) = r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$. Die Nebenbedingung erhält man aus dem gegebenen Volumen. Es gilt: $V(r, h) = r^2 \cdot \pi \cdot h = 300$. Daraus berechnet man h und setzt in die Hauptbedingung ein! Man erhält $O(r) = r^2 \cdot \pi + \frac{600}{r}$. Die erste Ableitung ergibt: $O'(r) = 2r \cdot \pi - \frac{600}{r^2} = 0$. Daraus bestimmt man $r = \sqrt[3]{\frac{300}{\pi}} = 4,57 \text{ dm}$. Setzt man in die Nebenbedingung ein, erhält man $h=r$, der halbe Tonnenquerschnitt muss also ein Quadrat sein.
- b) Soll die Tonne einen verstärkten Boden erhalten, ändert sich die Hauptbedingung folgend:
 $O(r, h) = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$. Setzt man h aus der Nebenbedingung hier ein, erhält man:
 $O(r) = 2r^2 \cdot \pi + \frac{600}{r}$. Die Ableitung liefert: $O'(r) = 4r \cdot \pi - \frac{600}{r^2} = 0$ und damit: $r = 3,63 \text{ dm}$. Setzt man in die Nebenbedingung ein, erhält man $h=2r$, der Tonnenquerschnitt muss also ein Quadrat sein!