

Wiederholungsprüfung Herbsttermin 2004

7. Klasse

- 1) Ein Kreis k , der seinen Mittelpunkt auf der y -Achse hat, hat die Gerade $g: 3x + 4y = 13$ als Tangente im Punkt $P(3, y)$.
 - a) Bestimme die Gleichung dieses Kreises!
 - b) Berechne die Schnittpunkte dieses Kreises mit der Geraden $h: x + y = 4$
- 2) Zeige, dass die Gerade $g: x + 4y = 10$ Tangente an die Ellipse $ell: x^2 + 4y^2 = 20$ ist, und zwar:
 - a) ohne Verwendung der Berührbedingung!
 - b) unter Anwendung der Berührbedingung! Bestimme auch die Koordinaten des Berührungpunktes!
- 3) Die Funktion $f(x) = \frac{ax^2 + b}{x^2 + 1}$ hat im Punkt $P(1, \frac{3}{2})$ die Tangentensteigung $k_t = \frac{1}{2}$.
 - a) Bestimme aus diesen Angaben die Gleichung der Funktion!
 - b) Bestimme die Gleichung der Tangente in P !
 - c) Berechne Lage und Art aller Extremwerte der Funktion und skizziere ihren Verlauf möglichst genau!
- 4) Die Funktion $f(x) = 3x^3 - 2x + 1$ wird in $P(1, y)$ von einer Funktion $g(x) = ax^2 + b$ berührt!
 - a) Bestimme die Gleichung der Funktion $g(x)$ sowie Lage und Art ihres Extremwerts!
 - b) Skizziere den Verlauf beider Funktionen!

[1)a) 3P. b) 3P. 2) a) 4P. b) 2P. 3) a) 3P. b)1P. c)2P. 4)a)3P. b) 3P.]

Lösungen:

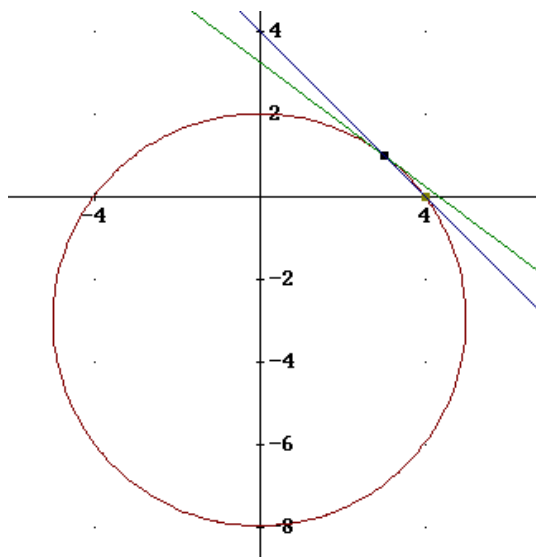
- 1) a) Für den Mittelpunkt M gilt: $M(0, n)$ und damit
 $k: x^2 + (y-n)^2 = r^2$

Da g Tangente an den Kreis ist, muss die Normale n auf g durch den Kreismittelpunkt gehen. Für die Normale n erhält man: $n: -4x + 3y = -9$. Da M auf der Normalen liegt, gilt: $3n = -9$ und damit $n = -3$. Den Radius des Kreises bestimmt man aus der Länge des Vektors MP und erhält $r=5$. Die Kreisgleichung lautet daher:

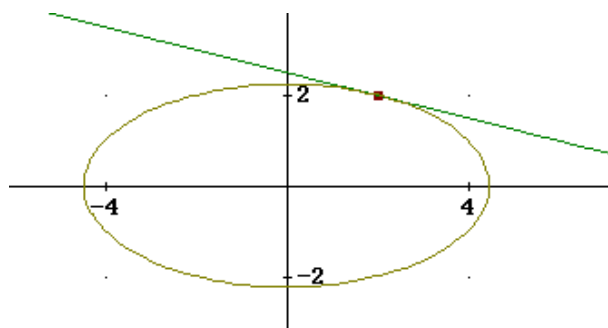
$$x^2 + (y+3)^2 = 25.$$

- b) Für die Schnittpunkte des Kreises mit der Geraden h: $x + y = 4$ erhält man: $S_1(3, 1)$ und $S_2(4, 0)$.

Die folgende Skizze stellt die Lage von Kreis, Tangente und Gerade dar:



- 2) Schneidet man die Gerade g mit der Ellipse, erhält man die Gleichung: $y^2 - 4y + 4 = 0$, die als Doppellösung $y_{1,2} = 2$ liefert. Es gibt daher nur einen Berührungspunkt mit den Koordinaten $T(2, 2)$. Anwendung der Berührbedingung liefert unmittelbar eine wahre Aussage. Die folgende Skizze veranschaulicht die Lage der Ellipse und ihrer Tangente:



- 3) Für die erste Ableitung in allgemeiner Form

erhält man: $f'(x) = \frac{2x \cdot (a-b)}{x^2 + 1}$.

Wegen $f'(1) = 1/2$ und $f(1) = 3/2$ erhält man die Gleichungen: $a + b = 3$ und $2a - 2b = -2$, aus denen man $a=2$ und $b=1$ berechnet.

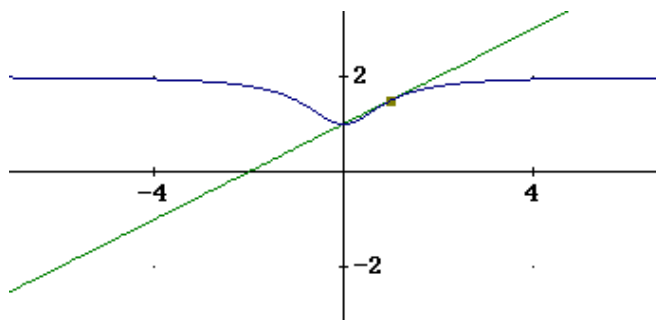
Die Funktion lautet daher: $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1}$.

Die Gleichung der Tangente in P erhält man als

$t: y = \frac{1}{2}x + 1$.

$f(x)$ besitzt in $E(0, 1)$ ein lokales Minimum.

Die Skizze veranschaulicht die Lage der Funktion:



- 4) Für P berechnet man $P(1, 2)$.

$f(x)$ hat in P die Steigung $k=7$, die Tangente in P lautet t:

$y = 7x - 5$.

Für $g(x)$ gilt: $g(1) = 2$ und $g'(1) = 7$. Daraus ermittelt man rasch $a = 7/2$ und $b = -3/2$.

$g(x)$ lautet daher: $g(x) = \frac{7}{2}x^2 - \frac{3}{2}$.

Für den Extremwert von $g(x)$ berechnet man $E(0, -3/2)$, es ist dies der Scheitel dieser Parabel! Die folgende Skizze veranschaulicht die Lage der beiden Funktionen.

