

4. Schularbeit - computerunterstützt

7C

24.3.2004

1) Dieses Beispiel ist vollständig und ohne Computerunterstützung im Heft zu rechnen!

Gegeben ist der Kreis $k: x^2 + y^2 - 4x - 10y - 21 = 0$

- Bestimme Mittelpunkt und Radius des Kreises k !
- Berechne die Schnittpunkte des Kreises k mit der Geraden $g: x - y = -3$!
- Bestimme die Gleichungen der Tangenten t_1 und t_2 parallel zur Geraden g an den Kreis!

2) Die Gerade $g: 2x + y = 18$ ist Tangente im Punkt $T(8, y)$ an einen Kreis k , der seinen Mittelpunkt auf der x -Achse hat.

- Bestimme aus diesen Angaben die Kreisgleichung! (Skizze!)
- Zeige, dass der Punkt $Q(6, 4)$ auf diesem Kreis liegt und bestimme die Gleichung der Kreistangente t in Q !
- Zeige, dass die Normale n auf die Kreistangente t im Punkt Q durch den Kreismittelpunkt geht! (Tangenteneigenschaft)

3)

Berechne in der Menge der komplexen Zahlen (ausführlich im Heft!):

- $(1 + 2i) \cdot x - 2 + i = 4ix - 8i$
- $\frac{1-2i}{i} \cdot x = 4i \cdot (1-i)$

4) $f(x) = x^3 + ax^2 + x$ soll bei $x=1$ einen Wendepunkt haben.

- Bestimme die Funktionsgleichung sowie die Koordinaten des Wendepunktes!
- Berechne Lage und Art aller Extremwerte der Funktion!
- Skizziere den Verlauf der Funktion möglichst genau!

[1) a)1P. b)3P. c) 2P. 2)a) 2P. b) 2P. c)2P. 3) a) 2P. b) 2P. 4) a)2P. b)2P. c) 2P.]

Lösungen:

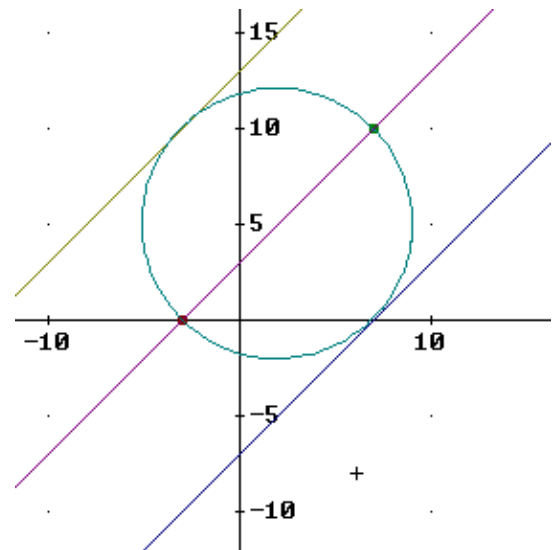
1) a) Aus der gegebenen Kreisgleichung berechnet man durch quadratische Ergänzung unmittelbar $k: (x-2)^2 + (y-5)^2 = 50$, woraus sich der Mittelpunkt $M(2, 5)$ und der Radius $r = \sqrt{50}$ ergibt.

b) Die Schnittpunkte des Kreises mit der Geraden g erfolgt durch Einsetzen von g in k . Man erhält folgende quadratische Gleichung: $x^2 - 4x - 21 = 0$. Man erhält für die beiden Schnittpunkte $S_1(7, 10)$ sowie $S_2(-3, 0)$.

c) Die Gleichungen der beiden Tangenten parallel zur Geraden g an den Kreis k bestimmt man mit Hilfe der Berührbedingung. Aus der Gleichung der Geraden g berechnet man $k=1$ und $d=3$. Einsetzen in die Berührbedingung: $(km - n + d)^2 = r^2 \cdot (k^2 + 1)$ liefert: $(2-5+d)^2 = 100$. Daraus berechnet man $d_1 = 13$ und $d_2 = -7$.

Die beiden Kreistangenten lauten somit:

$t_1: y = x + 13$ und $t_2: y = x - 7$. Die folgende Graphik veranschaulicht die Lage der Schnittpunkte sowie der Kreistangenten:



2) a) Aus der Geraden g berechnet man die Koordinaten des Punktes T als $T(8, 2)$. Da der Kreismittelpunkt auf der x -Achse liegt, erhält man den Mittelpunkt, indem man eine Normale auf g durch den Punkt T legt und mit der x -Achse schneidet. Der Normalvektor dieser Normalen n lautet $(-1, 2)$, ihre Gleichung daher: $n: -x + 2y = -4$. Schneidet man diese Normale n mit der x -Achse ($y=0$), erhält man $x=4$. Der Mittelpunkt des Kreises lautet daher $M(4, 0)$. Den Radius berechnet man aus der Länge des Vektors MT . Man erhält $r = \sqrt{20}$. Die Kreisgleichung lautet: $k: (x - 4)^2 + y^2 = 20$.

b) Um zu überprüfen, ob der Punkt $Q(6, 4)$ auf dem Kreis liegt, setzt man ihn einfach in die Kreisgleichung ein! Man erhält unmittelbar eine wahre Aussage! Die Gleichung der Tangente in Q bestimmt man mit Hilfe der Tangentenformel und erhält: $t: (x - 4) \cdot 2 + 4y = 20$ oder: $t: x + 2y = 14$.

c) Die Normale n auf die Kreistangente in Q hat den Normalvektor $(-2, 1)$, ihre Gleichung lautet daher: $n: -2x + y = -8$. Dass der Mittelpunkt $M(4, 0)$ auf dieser Normalen liegt, ist direkt einsichtig!

3) a) $(1 + 2i) \cdot x - 2 + i = 4ix - 8i$

Einfaches Umformen führt auf die Gestalt: $(1 - 2i) \cdot x = 2 - 9i$. Die anschließende Division führt auf $x = 4 - i$.

b) $\frac{1-2i}{i} \cdot x = 4i \cdot (1-i)$.

Auch hier führt einfache Multiplikation mit i auf die Gestalt: $(1 - 2i) \cdot x = -4 + 4i$. Die anschließende Division führt auf

$x = -\frac{12}{5} - \frac{4}{5}i$.

4) a) $f(x) = x^3 + ax^2 + x$ hat die zweite Ableitung $f''(x) = 6x + 2a$. Wegen $f''(1) = 0$ gilt $a = -3$. Die Funktion lautet somit: $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$. Der Wendepunkt lautet daher $W(1, -1)$.

b) Für $f'(x)$ berechnet man: $f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$ und daraus Punkte mit waagrechtter Tangente bei

$x_1 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$ und $x_2 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$. Daraus erhält man

$E_1(0,1835; 0,0886)$ und $E_2(1,816, -2,088)$.

Wegen $f''(x) < 0$ in E_1 und $f''(x) > 0$ in E_2 liegt in E_1 ein lokales Maximum, in E_2 ein lokales Minimum vor! Die folgende Graphik veranschaulicht die Lage der Funktion!

