4. Schularbeit

7A / Gruppe A 30.4.2004

1) Gegeben ist die Kreisgleichung: k: $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$
   a) Bestimme Mittelpunkt und Radius des Kreises!
   b) Zeige, dass die Gerade t: $3x + 4y = 19$ Tangente an den Kreis k ist! Berechne auch die Koordinaten des Berührpunkts T!
   c) Bestimme die Gleichung einer Ellipse, die durch P(2, -3) geht und den Brennpunkt F($\sqrt{30}$, 0) hat und zeige, dass diese Ellipse genau durch den Kreismittelpunkt geht!

2) Ein Kreis k hat den Mittelpunkt M(3, 1) und den Radius r= $\sqrt{20}$.
   a) Bestimme die Schnittpunkte S_1 und S_2 des Kreises k mit der Geraden g: $x - 2y = 1$!
   b) Stelle die Gleichungen der Tangenten t_1 und t_2 in den beiden Schnittpunkten auf!
   c) Zeige, dass die Normale n auf die Tangente, die man in einem Schnittpunkt legen kann, durch den Kreismittelpunkt geht!

3) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 60x$
   a) Bestimme für die Funktion f(x) Lage und Art aller Extremwerte und Wendepunkte!
   b) Skizziere den Verlauf der Funktion möglichst genau!

4) Berechne in der Menge der komplexen Zahlen:

$$\frac{1+i}{2-i} \cdot x = i \cdot (1-2i)$$

[1) a) 1P. b) 3P. c)2P. 2) a) 4P. b) 1P. c) 1P. 3) a) 4P. b) 2P. 4) 2P.]

4. Schularbeit

7A / Gruppe B 30.4.2004

1) Gegeben ist die Kreisgleichung: k: $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$
   a) Bestimme Mittelpunkt und Radius des Kreises!
   b) Zeige, dass die Gerade t: $3x + 4y = 26$ Tangente an den Kreis k ist! Berechne auch die Koordinaten des Berührpunkts T!
   c) Bestimme die Gleichung einer Ellipse, die durch P(3, -2) geht und den Brennpunkt F($\sqrt{14}$, 0) hat und zeige, dass diese Ellipse genau durch den Kreismittelpunkt geht!

2) Ein Kreis k hat den Mittelpunkt M(1, 3) und den Radius r= $\sqrt{20}$.
   a) Bestimme die Schnittpunkte S_1 und S_2 des Kreises k mit der Geraden g: $-2x + y = 1$!
   b) Stelle die Gleichungen der Tangenten t_1 und t_2 in den beiden Schnittpunkten auf!
   c) Zeige, dass die Normale n auf die Tangente, die man in einem Schnittpunkt legen kann, durch den Kreismittelpunkt geht!

3) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x$
   a) Bestimme für die Funktion f(x) Lage und Art aller Extremwerte und Wendepunkte!
   b) Skizziere den Verlauf der Funktion möglichst genau!

4) Berechne in der Menge der komplexen Zahlen:

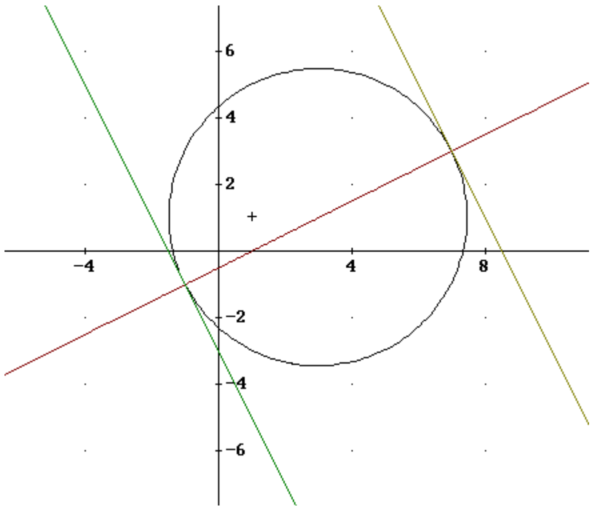
$$\frac{1-i}{2-i} \cdot x = i \cdot (1+2i)$$

[1) a) 1P. b) 3P. c)2P. 2) a) 4P. b) 1P. c) 1P. 3) a) 4P. b) 2P. 4) 2P.]

Lösungen:
Gruppe A:

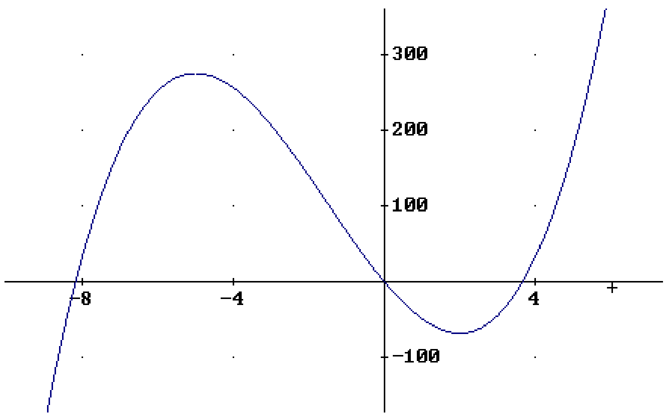
1) a) Aus der Kreisgleichung k: $x^2 + y^2 – 4x + 6y – 12 = 0$ berechnet man durch quadratische Ergänzung unmittelbar : k: $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$, woraus man M(2, -3) und r=5 ablesen kann.
b) Die Gerade t: $3x + 4y = 19$ hat die Steigung $k= -{}^3/_4$ und $d= {}^{19}/_4$. Setzt man diese Werte mit r=5 in die Berührbedingung für verschobene Kreise ein, erhält man unmittelbar eine wahre Aussage. Somit ist t Tangente n den Kreis k! Die Koordinaten des Berührpunktes lassen sich rasch ermitteln, indem man eine Normale n auf die Tangente t durch den Kreismittelpunkt legt und mit t schneidet. Da die Normale n den Normalvektor (-4, 3) haben muss, erhält man für sie folgende Gleichung:
n: $- 4x + 3y = -17$. Löst man nun noch das Gleichungssystem für t und n, erhält man als Berührpunkt T(5, 1).
c) Die Gleichung einer Ellipse mit dem gegebenen Brennpunkt F und P(2, -3) bestimmt man durch Einsetzen in die Ellipsengleichung. Man erhält:
$4 b^2 + 9a^2 = a^2b^2$ sowie $a^2 – b^2 = 30$. Setzt man nun in die erste Gleichung für a^2 den Term $30+b^2$ ein, erhält man folgende Gleichung: $b^4 + 17b^2 – 270=0$. Setzt man in dieser Gleichung $b^2=u$, erhält man $b^2=10$. Unmittelbar daraus ergibt sich $a^2=40$. Die Gleichung lautet daher: $10x^2 + 40y^2 = 400$ oder $x^2+4y^2=40$. Durch Einsetzen erkennt man sofort, dass der Kreismittelpunkt M(2, -3) auf der Ellipse liegt!

2) a) Aus den Angaben lässt sich die Kreisgleichung unmittelbar formulieren:
k: $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 20$. Schneidet man nun den Kreis mit der Geraden g:, erhält man folgende quadratische Gleichung: $x^2 – 6x – 7 =0$, woraus man die beiden Lösungen $x_1=7$ und $x_2 = -1$ berechnet.
Für y_1 und y_2 erhält man $y_1=3$ und $y_2=-1$. Die beiden Schnittpunkte lauten somit $S_1(7, 3)$ und $S_2(-1, -1)$.
b) Die Gleichungen der Tangenten berechnet man mit der Tangentenformel. Man erhält:
t_1: $(x-3) \cdot 4 + (y-1)\cdot 2 = 20$ oder : t_1: $2x + y = 17$ sowie
t_2 : $(x-3) \cdot (-4) + (y-1)\cdot (-2) = 20$ oder :
t_2: $2x + y = -3$. Die folgende Skizze veranschaulicht die Lage von Kreis und Tangenten:



c) Die Normale n auf t_1 durch S_1 erhält man über den Normalvektor n=(-1, 2). Ihre Gleichung lautet:
n: $- x + 2y = -1$. Dass der Mittelpunkt M(3, 1) auf dieser Geraden liegt, ist unmittelbar klar.

3) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 – 60x$. Man berechnet die erste Ableitung der Funktion als: $f\,'(x) = 6x^2 + 18x – 60$.



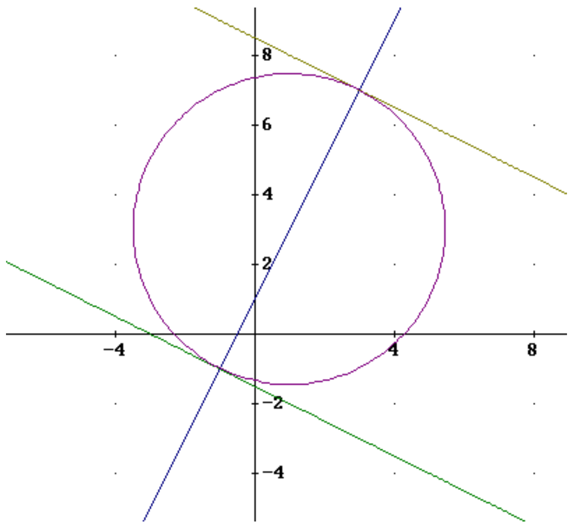
Für mögliche Extremwerte kommen nur die Nullstellen der ersten Ableitung in Frage. Man erhält: x_1= -5 und x_2=2. Für die beiden Punkten mit waagrechter Tangente erhält man daher: E_1(-5, 275) und E_2(2, -68). Wegen f ''(x) = 12x + 18 und f ''(-5)<0 und f ''(2)>0 ist E_1 ein lokales Maximum, E_2 ein lokales Minimum. Bei W(-1.5, 103.5) liegt ein Wendepunkt vor. Die nebenstehende Skizze veranschaulicht die Lage der Funktion f(x):

4) a) $\frac{1+i}{2-i} \cdot x = i \cdot (1-2i)$. Einfaches Erweitern mit dem Nenner ergibt: (1+i)·x=5. Die anschließende Division ergibt: x= $^5/_2$ – $^5/_2$ i.

Lösungen:
Gruppe B:

1) a) Aus der Kreisgleichung k: $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ berechnet man durch quadratische Ergänzung unmittelbar : k: $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$, woraus man M(3, -2) und r=5 ablesen kann.
b) Die Gerade t: 3x + 4y = 26 hat die Steigung k= - $^3/_4$ und d= $^{13}/_2$. Setzt man diese Werte mit r=5 in die Berührbedingung für verschobene Kreise ein, erhält man unmittelbar eine wahre Aussage. Somit ist t Tangente n den Kreis k! Die Koordinaten des Berührpunktes lassen sich rasch ermitteln, indem man eine Normale n auf die Tangente t durch den Kreismittelpunkt legt und mit t schneidet. Da die Normale n den Normalvektor (-4, 3) haben muss, erhält man für sie folgende Gleichung:
n: -4x + 3y = -18. Löst man nun noch das Gleichungssystem für t und n, erhält man als Berührpunkt T(6, 2).
c) Die Gleichung einer Ellipse mit dem gegebenen Brennpunkt F und P(3, -2) bestimmt man durch Einsetzen in die Ellipsengleichung. Man erhält:
$9b^2 + 4a^2 = a^2b^2$ sowie $a^2 - b^2 = 14$. Setzt man nun in die erste Gleichung für a^2 den Term $14+b^2$ ein, erhält man folgende Gleichung: $b^4 + b^2 - 56=0$. Setzt man in dieser Gleichung b^2=u, erhält man b^2=7. Unmittelbar daraus ergibt sich a^2=21. Die Gleichung lautet daher: $7x^2 + 21y^2 = 147$ oder $x^2+3y^2=21$. Durch Einsetzen erkennt man sofort, dass der Kreismittelpunkt M(3, -2) auf der Ellipse liegt!

2) a) Aus den Angaben lässt sich die Kreisgleichung unmittelbar formulieren:
k: $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 20$. Schneidet man nun den Kreis mit der Geraden g:, erhält man folgende quadratische Gleichung: $x^2 - 2x - 3 = 0$, woraus man die beiden Lösungen x_1=3 und x_2 = -1 berechnet. Für y_1 und y_2 erhält man y_1=7 und y_2=-1. Die beiden Schnittpunkte lauten somit S_1(3, 7) und S_2(-1, -1).
b) Die Gleichungen der Tangenten berechnet man mit der Tangentenformel. Man erhält:



t_1: (x-1) · 2 + (y-3)· 4 = 20 oder : t_1: x + 2y = 17

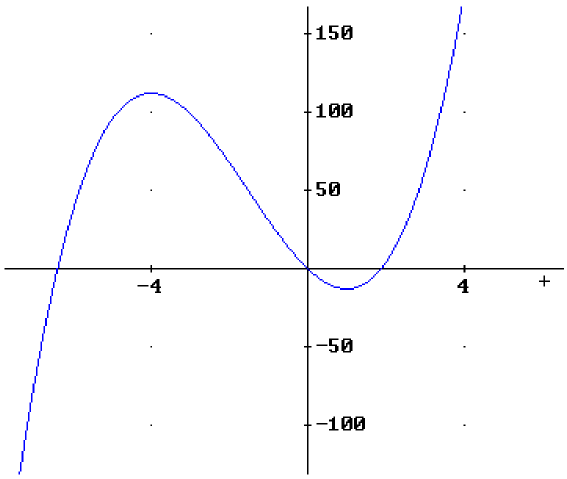
sowie t_2 : (x-1) · (-2) + (y-3)· (-4) = 20 oder :

t_2: x + 2y = -3. Die folgende Skizze veranschaulicht die Lage von Kreis und Tangenten:

c) Die Normale n auf t_1 durch S_1 erhält man über den Normalvektor n=(-2, 1). Ihre Gleichung lautet:

n: - 2x + y = 1. Dass der Mittelpunkt M(1, 3) auf dieser Geraden liegt, ist unmittelbar klar.

3) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 – 24x$. Man berechnet die erste Ableitung der Funktion als: $f'(x) = 6x^2 + 18x – 24$. Für mögliche Extremwerte kommen nur die Nullstellen der ersten Ableitung in Frage. Man erhält: x_1= -4 und x_2=1. Für die beiden Punkten mit waagrechter Tangente erhält man daher: E_1(-4, 112) und E_2(1, -13). Wegen $f''(x) = 12x + 18$ und $f''(-4)<0$ und $f''(1)>0$ ist E_1 ein lokales Maximum, E_2 ein lokales Minimum. Bei W(-1.5, 49.5) liegt ein Wendepunkt vor. Die nebenstehende Skizze veranschaulicht die Lage der Funktion f(x):



4) a) $\frac{1-i}{2-i} \cdot x = i \cdot (1+2i)$. Einfaches Erweitern mit dem Nenner ergibt: (1-i)·x=-3+4i. Die anschließende Division ergibt: x= $-\frac{7}{2} + \frac{1}{2}$ i.