**3. Schularbeit**

7A / Gruppe A 29.1.2004

1) Die Funktion $f(x) = {}^{1}/_{2}\, x^2 - x$ wird in P(2, y) von einer Funktion $g(x)= ax^3 + bx^2$ berührt.

a) Bestimme die Funktionsgleichung von g(x)!
b) Bestimme Extremwerte und allfällige Wendepunkte beider Funktionen und skizziere ihren Verlauf!

2) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+4}$

a) Bestimme den Definitionsbereich der Funktion! Besitzt f(x) Polstellen?
b) Führe eine vollständige Kurvendiskussion durch (Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte)!
c) Skizziere den Verlauf der Funktion!

3) Ein zylinderförmiges, oben offenes Gefäß soll eine dreifach verstärkte Bodenplatte haben und 1 Liter fassen. Welche Abmessungen muss das Gefäß haben, wenn zu seiner Herstellung möglichst wenig Material benötigt werden soll? Erkläre ausführlich die Vorgangsweise bei der Lösung dieser Aufgabe!

[1) a) 3P. b) 5P. 2) a) 1P. b) 5P. c) 2P. 3) 6P.]

**3. Schularbeit**

7A / Gruppe B 29.1.2004

1) Die Funktion $f(x) = 2x^2 - x$ wird in P(2, y) von einer Funktion $g(x)= ax^3 + bx^2$ berührt.

a) Bestimme die Funktionsgleichung von g(x)!
b) Bestimme Extremwerte und allfällige Wendepunkte beider Funktionen und skizziere ihren Verlauf!

2) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+9}$

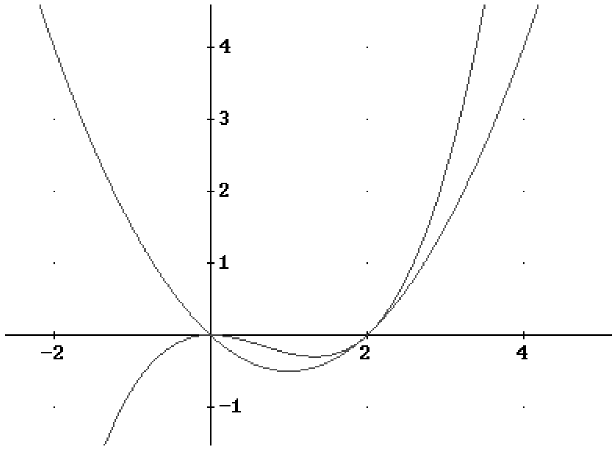
a) Bestimme den Definitionsbereich der Funktion! Besitzt f(x) Polstellen?
b) Führe eine vollständige Kurvendiskussion durch (Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte)!
c) Skizziere den Verlauf der Funktion!

3) Ein zylinderförmiges, oben offenes Gefäß soll dreifach verstärkte Seitenwände haben und 1 Liter fassen. Welche Abmessungen muss das Gefäß haben, wenn zu seiner Herstellung möglichst wenig Material benötigt werden soll? Erkläre ausführlich die Vorgangsweise bei der Lösung dieser Aufgabe!

[1) a) 3P. b) 5P. 2) a) 1P. b) 5P. c) 2P. 3) 6P.]

Lösungen Gruppe A:

1) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$ . Durch Einsetzen erhält man unmittelbar P(2, 0).
Für $f'(x)$ gilt: $f'(x) = x - 1$ . $f'(2) = 1$. Die ist die Steigung der Tangente in P. Es gilt nun:
$g(2) = 0$ und $g'(2) = 1$. Daraus ermittelt man die beiden Bedingungen:
$8a + 4b = 0$ und $12a + 4b = 1$. Die Lösungen des Gleichungssystems lauten: $a=\frac{1}{4}$ und $b=-\frac{1}{2}$.
Die Funktion g(x) lautet daher: $g(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2$ .
Kurvendiskussion:
Extremwerte von f(x): $f'(x) = x - 1 = 0$ und $f''(x) = 1 > 0$, daher hat f(x) in $E(1, -\frac{1}{2})$ ein lokales Minimum.
$g'(x)= \frac{3}{4}x^2 - x = 0$ hat als Lösungen $x_1=0$ und $x_2=\frac{4}{3}$.
Wegen $g''(x)= \frac{3}{2}x - 1$ und $g''(0)=-1<0$ und $g''(\frac{4}{3})=1>0$ hat g(x) in $E_1(0, 0)$ ein lokales Maximum und in $E_2(\frac{4}{3}, -\frac{8}{27})$ ein lokales Minimum.
Wegen $g''(x)= -\frac{3}{2}x + 1 = 0$ folgt $x=\frac{2}{3}$. g(x) hat in $W(\frac{2}{3}, -\frac{4}{27})$ einen Wendepunkt.
Die folgende Graphik zeigt den Verlauf beider Funktionen:



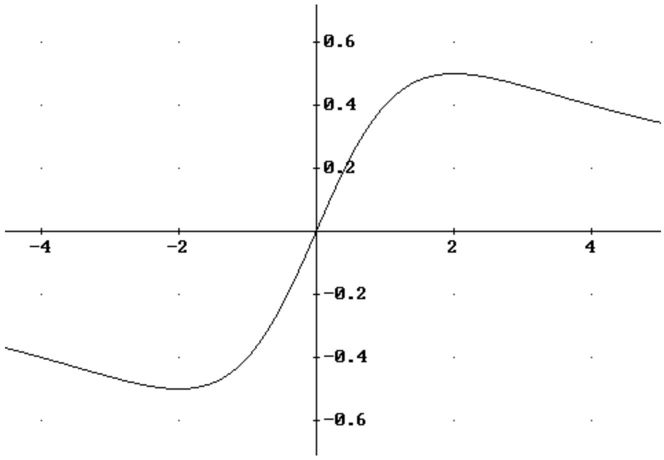

2) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+4}$

Der Definitionsbereich dieser Funktion ist R.
Nullstellen: f(x) hat in N(0, 0) eine Nullstelle:
Für f '(x) berechnet man: $f'(x) = \dfrac{2\cdot(x^2+4) - 2x\cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \dfrac{-2x^2+8}{(x^2+4)^2} = 0$

und daraus $x_1=2$ und $x_2= -2$
Für f ''(x) berechnet man:

$$f''(x) = \frac{-4x\cdot(x^2+4)^2 - (-2x^2+8)\cdot 2\cdot(x^2+4)\cdot 2x}{(x^2+4)^4} = \frac{-4x\cdot(x^2+4) - 4x\cdot(-2x^2+8)}{(x^2+4)^3} = \frac{-4x^3 - 16x + 8x^3 - 32x}{(x^2+4)^3}$$

Daraus ergibt sich: $4x^3 - 48x = 0$ und weiter $x_1= 0$ und ebenso $x_2= \sqrt{12}$ und $x_3= -\sqrt{12}$
f(x) besitzt drei Wendepunkte, nämlich bei
$W_1(0, 0)$, $W_2(\sqrt{12}, \frac{1}{4}\cdot\sqrt{3})$,
$W_3(-\sqrt{12}, -\frac{1}{4}\cdot\sqrt{3})$ .




3) Man formuliert als Hauptbedingung:
$O(r, h) = 3\cdot r^2\cdot\pi + 2\cdot r\cdot\pi\cdot h$ soll minimal werden unter der Nebenbedingung:
$V=r^2\cdot\pi\cdot h=1000$. Aus der Nebenbedingung berechnet man $h = \dfrac{1000}{r^2\cdot\pi}$. Setzt man diesen

Term in die Hauptbedingung ein, erhält man:

$$O(r) = 3r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r\pi \cdot \frac{1000}{r^2 \cdot \pi} = 3r^2 \cdot \pi + \frac{2000}{r}.$$

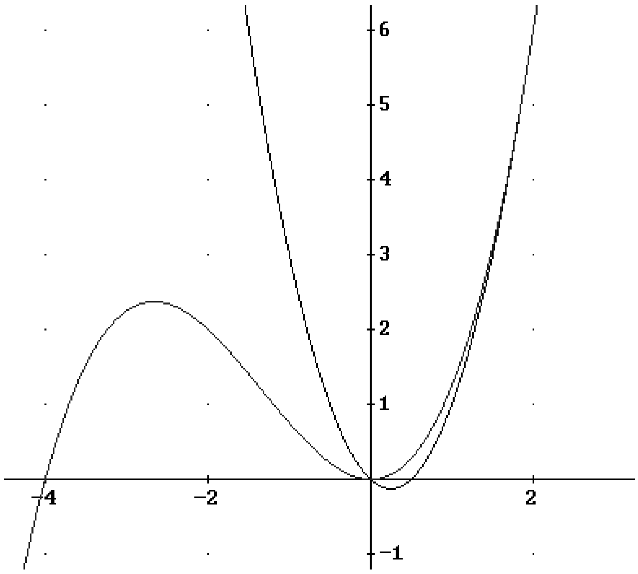
Bildet man die erste Ableitung, erhält man:

$$O'(r) = 6r \cdot \pi - \frac{2000}{r^2} = 0.$$

Daraus erhält man: $6r^3 \cdot \pi = 2000$ und weiter: $r = \sqrt[3]{\frac{1000}{3 \cdot \pi}}$ =4,734cm. Durch Rückeinsetzen in die Nebenbedingung erhält man: h=14,20cm. Genaugenommen gilt: h=3r.

Lösungen Gruppe B:

1) $f(x) = 2x^2 - x$ . Durch Einsetzen erhält man unmittelbar P(2, 6).
Für f '(x) gilt: $f'(x) = 4x - 1$ . $f'(2) = 7$. Die ist die Steigung der Tangente in P. Es gilt nun:
$g(2) = 6$ und $g'(2) = 7$. Daraus ermittelt man die beiden Bedingungen:
$8a + 4b = 6$ und $12a + 4b = 7$. Die Lösungen des Gleichungssystems lauten: $a = {}^1/_4$ und $b=1$.
Die Funktion g(x) lautet daher: $g(x) = {}^1/_4 x^3 + x^2$ .
Kurvendiskussion:
Extremwerte von f(x): $f'(x) = 4x - 1 = 0$ und $f''(x) = 4 > 0$, daher hat f(x) in $E({}^1/_4, -{}^1/_8)$ ein lokales Minimum.
$g'(x) = {}^3/_4 x^2 + 2x = 0$ hat als Lösungen $x_1=0$ und $x_2 = -{}^8/_3$.
Wegen $g''(x) = {}^3/_2 x + 2$ und $g''(0) = 2 > 0$ und $g''(-{}^8/_3) = -2 < 0$ hat g(x) in $E_1(0, 0)$ ein lokales Minimum und in $E_2(-{}^8/_3, {}^{64}/_{27})$ ein lokales Maximum.
Wegen $g''(x) = {}^3/_2 x + 2 = 0$ folgt $x = -{}^4/_3$. g(x) hat in $W(-{}^4/_3, {}^{32}/_{27})$ einen Wendepunkt.
Die folgende Graphik zeigt den Verlauf beider Funktionen:



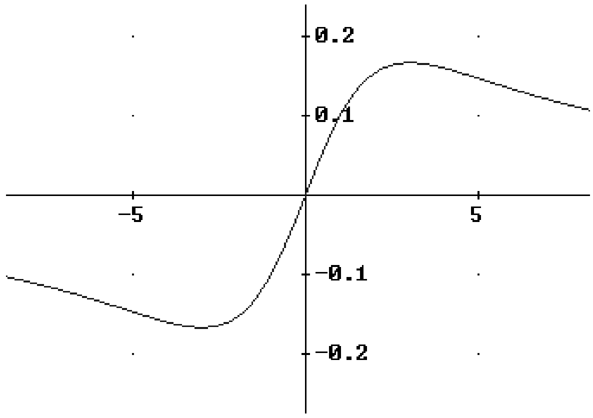

2) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 9}$

Der Definitionsbereich dieser Funktion ist R.
Nullstellen: f(x) hat in N(0, 0) eine Nullstelle:
Für f '(x) berechnet man: $f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+9) - 2x \cdot x}{(x^2+9)^2} = \frac{-x^2+9}{(x^2+9)^2} = 0$

und daraus $x_1=3$ und $x_2= -3$
Für f ''(x) berechnet man:

$$f''(x) = \frac{-2x \cdot (x^2+9)^2 - (-x^2+9) \cdot 2 \cdot (x^2+9) \cdot 2x}{(x^2+9)^4} = \frac{-2x \cdot (x^2+9) - 4x \cdot (-x^2+9)}{(x^2+9)^3} = \frac{-2x^3 - 18x + 4x^3 - 36x}{(x^2+9)^3} =$$

Daraus ergibt sich: $2x^3 - 54x = 0$ und weiter $x_1= 0$ und ebenso $x_2= \sqrt{27}$ und $x_3= -\sqrt{27}$




f(x) besitzt drei Wendepunkte, nämlich bei

$W_1(0, 0)$, $W_2(\sqrt{27}, \frac{1}{12}\cdot\sqrt{3})$,

$W_3(-\sqrt{27}, -\frac{1}{12}\cdot\sqrt{3})$.

3) Man formuliert als Hauptbedingung:
$O(r, h) = r^2\cdot\pi + 6\cdot r\cdot \pi\cdot h$ soll minimal werden unter der Nebenbedingung:
$V=r^2\cdot \pi\cdot h=1000$. Aus der Nebenbedingung berechnet man $h=\frac{1000}{r^2\cdot\pi}$. Setzt man diesen Term in die Hauptbedingung ein, erhält man:

$$O(r)=r^2\cdot\pi+6\cdot r\pi\cdot\frac{1000}{r^2\cdot\pi}=r^2\cdot\pi+\frac{6000}{r}.$$

Bildet man die erste Ableitung, erhält man:

$$O'(r)=2r\cdot\pi-\frac{6000}{r^2}=0.$$

Daraus erhält man: $2r^3\cdot\pi = 6000$ und weiter: $r=\sqrt[3]{\frac{3000}{\pi}}$ =9,847cm. Durch Rückeinsetzen in die Nebenbedingung erhält man: h=3,282cm. Genaugenommen gilt: r=3h.