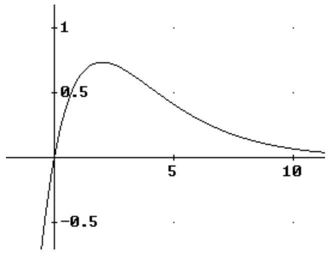
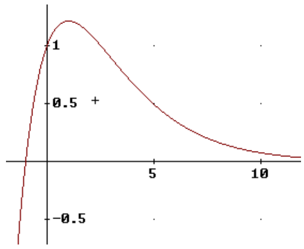
Übungen zur Differential- und Integralrechnung 8.Klassen, 2004





1) Die Funktion f(x) = $x \cdot e^{kx}$ hat bei x=2 einen Extremwert.

a) Bestimme die Gleichung der Funktion und führe eine vollständige Kurvendiskussion durch!

b) Bestimme die Gleichung der Tangente an f(x) im Koordinatenursprung!

c) Zeichne die Funktion möglichst genau!

[k=-$^1/_2$, Nullstellen bei N(0, 0), Maximum bei (2, $^2/_e$), W(4, $^4/_{e^2}$), Gleichung der Tangente im Ursprung t: y=x]

2) Die Funktion f(x) = $(x-a)) \cdot e^{bx}$ hat bei x=1 einen Extremwert und bei x=3 einen Wendepunkt. Bestimme die Gleichung dieser Funktion! Führe eine Kurvendiskussion durch!

[a=-1, b= -$^1/_2$, N(-1, 0), E(1; 1,213), W(3, 0,8925)]

3) Die Funktion a·ln(x) + b hat an der Stelle P(1, 3) die Tangentensteigung k_t=-1.

a) Bestimme aus dieser Angabe die Gleichung der Funktion und führe eine vollständige Kurvenuntersuchung durch!

b) Berechne die Gleichung der Tangente in Q(e, y)!

[f(x)= -ln(x)+3, Nullstelle bei N(e^3, 0), keine Extremwerte keine Wendepunkte, t: y=-$^1/_2$·x+ $^1/_2$·(e+4)]

4) Berechne die Stammfunktionen für folgende Funktionen!

a) f(x) = $4x^4 - x^2 + 3$ b) f(x) = $3x^2 - 5x-1$ c) f(x) = $^1/_5 \cdot x^2 - 4x$

[a) F(x)=$^4/_5 x^5 - {^1/_3} x^3 + 3x + c$ b)F(x)=$x^3 - {^5/_2} x^2 - x + c$ c) F(x)=$^1/_{15} \cdot x^3 - 2x^2 + c$]

5) Berechne die Stammfunktion für folgende Funktionen!

a) f(x)=$\frac{2}{\sqrt[4]{x}} + 3 \cdot \sqrt{x^5} - \sqrt[4]{x^3}$ b)f(x)= $2 \cdot \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \sqrt{x^3} + \sqrt[4]{x} + \frac{1}{8 \cdot \sqrt{x}}$ c)f(x)= $\frac{5}{\sqrt[3]{x^5}} + 2 \cdot \sqrt{x^7} + \frac{1}{3} \cdot \sqrt[4]{x} + \frac{1}{8 \cdot \sqrt{x^3}}$

[a) F(x)=$\frac{6}{7} \cdot x^3 \cdot \sqrt{x} - \frac{4}{7} \cdot x \cdot \sqrt[4]{x^3} + \frac{8}{3} \cdot \sqrt[4]{x^3} + c$, b) F(x)= $\frac{2}{5} \cdot x^2 \cdot \sqrt{x} + \frac{4}{5} \cdot x \cdot \sqrt[4]{x} + \frac{1}{4} \cdot \sqrt{x} + 12 \cdot \sqrt[3]{x} + c$

c) F(x)= $\frac{4}{9} \cdot x^4 \cdot \sqrt{x} + \frac{4}{15} \cdot x \cdot \sqrt[4]{x} - \frac{1}{4 \cdot \sqrt{x}} - \frac{15}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + c$

6) Wenn ein Porsche Carrera (mit schon etwas abgefahrenen Reifen) eine Vollbremsung durchführt, verringert sich seine Geschwindigkeit etwa nach der Formel v(t)=v_0-9·t, bei einem Kleinwagen der Marke „Hundyai" mit schwachen Bremsen etwa nach der Formel v(t)=v_0-6,5·t.

a) Um wieviel Meter ist der Bremsweg des Porsche geringer bei einer Geschwindigkeit von v_0=8$^m/_s$, v_0=20$^m/_s$, v_0=145$^{km}/_h$ (für den Kleinwagen immerhin eine tolle Leistung!) ? Stelle entsprechende Wegfunktionen auf! Vernachlässige die Reaktionszeit! [Porsche 1,37m bzw.8,55m bzw.34,66m kürzer!]

b) Mit welcher Geschwindigkeit prallen Porsche bzw. „Hundyai" auf ein in 40m Entfernung erkanntes Hindernis, wenn die Geschwindigkeit v_0=28$^m/_s$ (ca. 100$^{km}/_h$) beträgt? [Porsche prallt mit ca. 28,8$^{km}/_h$, der „Hundyai" mit 58,5$^{km}/_h$ auf das Hindernis! Moral aus dieser Geschichte: Porsche kaufen!]

c) Berücksichtige in b) die Reaktionszeit von etwa 1 Sekunde! (Verwende dazu die Überlegung: s(0)=28, da der Bremsvorgang erst nach 28m einsetzt, das Hindernis ist zu diesem Zeitpunkt nur noch 12m(!!) entfernt! [Porsche prallt mit ca. 85,8$^{km}/_h$, der „Hundyai" mit 90,21$^{km}/_h$ auf das Hindernis! Moral aus dieser Geschichte: Nicht mehr unbedingt Porsche kaufen – ist nämlich auch schrottreif!]

d) Welche Geschwindigkeit hat der „Hundyai" noch, wenn der Porsche bereits steht? Nimm eine Anfangsgeschwindigkeit von v_0=15$^m/_s$ an! [15$^{km}/_h$]

7) (Fortsetzung) Auf schnee- oder eisglatter Fahrbahn haben beide Fahrzeuge ein wesentlich schlechteres Bremsverhalten. Für den Porsche gilt (aufgrund von ABS, ...) v(t)=v_0-5·t, für den „Hundyai" v(t)=v_0-3,5·t. Wiederhole alle Berechnungen des vorhergehenden Beispiels und stelle Vergleiche an!

[zu a) Porsche 2,74m bzw.17,14m bzw.69,53m kürzer!]

[zu b) Porsche prallt mit ca. 70,55$^{km}/_h$, der „Hundyai" mit 80,82$^{km}/_h$ auf das Hindernis!]

[zu c) Porsche prallt mit ca. 92,77$^{km}/_h$, der „Hundyai" mit 95,25$^{km}/_h$ auf das Hindernis!] [zu d) 30,24$^{km}/_h$]

8) Für einen Kleinwagen mit guten Bremsen gilt auf trockener Strasse bei einer Vollbremsung v(t)=v_0-7·t. Fahren ein Kleinwagen und ein beladener Tanklastzug mit 60$^{km}/_h$ hintereinander und sind zu einer Vollbremsung gezwungen, beträgt die Geschwindigkeit des Tankers noch 50$^{km}/_h$, wenn der Kleinwagen bereits steht!! (laut Auto Touring, Herbst 2004).

a) Berechne daraus die Geschwindigkeitsfunktion des Tankers! [v(t)=v_0-$^7/_6$·t.}

b) Welchen Bremsweg haben die beiden Fahrzeuge bei 60$^{km}/_h$? Was bedeutet dies für den Sicherheitsabstand?

[19,84m bzw. 119,05m bzw. bei Berücksichtigung der Reaktionszeit jeweils um ca.16,66m länger! Der Sicherheitsabstand muss also zumindest den Unterschied in den Bremswegen ausmachen, d.h. mindestens 100m betragen, und dies auch nur dann, wenn beide Fahrzeuge das Hindernis gleichzeitig erkennen!

9) $f(x)=2x^3+3x^2-12x$. Berechne für diese Funktion Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkt! Skizziere den Verlauf der Funktion und berechne die Fläche, die von f(x) und der x-Achse in den Intervallen [-2, 0], [0,1] und [2,4] gebildet wird!

[N_1(-3,31, 0) N_2(0, 0), N_3(1,81, 0), Max(-2, 20), Min (1, -7), 24 bzw. $^9/_2$ bzw. 104 Flächeneinheiten]

10) $f(x)=4x^3-12x^2-420x$. Berechne für diese Funktion Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkt! Skizziere den Verlauf der Funktion und berechne die Fläche, die von f(x) und der x-Achse in den Intervallen [-5, 0], [0,10] und [15,20] gebildet wird!

[N_1(-8,86, 0) N_2(0, 0), N_3(11,86, 0), Max(-5, 1300), Min (7, -2156), 15000 bzw. 54125 Flächeneinheiten]