BE 1.0 Die reelle Funktion

$$f'': x \mapsto f''(x);\ D_{f''} = \mathbb{R}$$

$$f''(x) = -3x^2 + 6ax \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}$$

ist die zweite Ableitungsfunktion der Funktion $f : x \mapsto f(x)$ mit $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem heißt G_f .

6 1.1.1 Der Graph G_f besitzt im Punkt P(2; 0) einen Wendepunkt. Die Tangente an diesen Graphen an der Stelle $x_0 = 0$ hat die Steigung $m = -4$.
Bestimmen Sie den Funktionsterm f(x) der Funktion f.

(Ergebnis: $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 4x + 4$)

6 1.1.2 Ermitteln Sie Art und Koordinaten sämtlicher Wendepunkte des Graphen G_f .

11 1.1.3 Bestimmen Sie die maximalen Intervalle, in denen die Funktion f echt monoton zu - bzw. abnimmt, sowie die Wertemenge W_f der Funktion f.

5 1.1.4 Zeichnen Sie den Graphen G_f für $-2 \le x \le 3$. Verwenden Sie dazu die bisherigen Ergebnisse und berechnen Sie zusätzlich die Funktionswerte $f(-2)$, $f(1)$ und $f(3)$.

Maßstab: x-Achse: 1 LE = 2 cm; y-Achse: 1 LE = 1 cm.

1.2.0 Gegeben sind nun die reellen Funktionen

$$g_p : x \mapsto g_p(x);\ D_{g_p} = \mathbb{R}$$

$$g_p(x) = x^3 - p^2 x \quad \text{mit } p \in \mathbb{R}.$$

7 1.2.1 Untersuchen Sie den Graphen G_{g_p} der Funktion g_p in Bezug auf

Symmetrie und bestimmen Sie Anzahl und Lage sämtlicher Nullstellen der Funktion g_p in Abhängigkeit von p.

6 1.2.2 Für p > 0 schließt der Graph G_{g_p} mit der x-Achse im IV. Quadranten ein endliches Flächenstück ein.

Berechnen Sie p > 0 so, dass die Maßzahl des zugehörigen Flächeninhalts den Wert 4 annimmt.

	1.3.0	Für die folgenden Teilaufgaben sei p = 2.
8	1.3.1	Bestimmen Sie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen G_{g_2} und zeichnen Sie diesen Graphen nur mit Hilfe bisheriger Ergebnisse für $-2 \leq x \leq 2$ in das vorhandene Koordinatensystem ein.
5	1.3.2	Die Graphen G_f und G_{g_2} schließen ein endliches Flächenstück ein. Begründen Sie ohne Rechnung unter Verwendung bisheriger Ergebnisse und der Zeichnung, dass die Maßzahl des zugehörigen Flächeninhalts gleich $\int_{-2}^{2} f(x)dx$ ist.
6	2	Die Zahl $\sqrt{10}$ ist so in zwei reelle positive Summanden zu zerlegen, dass die Summe der Quadrate dieser Summanden einen absoluten Extremwert annimmt. Berechnen Sie die beiden Summanden und entscheiden Sie, welche Art von absolutem Extremum vorliegt.
60		

A II

BE 1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen

$$f_k : x \mapsto f_k(x);\ D_{f_k} = \mathbb{R}$$

$$f_k(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3x^3 + kx^2 - 16x + 4 \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}.$$

Der Graph einer solchen Funktion f_k in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_{f_k} bezeichnet.

2 1.1 Begründen Sie mit Worten die folgende allgemeine Aussage: Ist x_0 eine doppelte Nullstelle der zweiten Ableitung f'' einer ganzrationalen Funktion f, dann ist x_0 keine Wendestelle von f.

8 1.2 Bestimmen Sie die Anzahl und die Abszissen der Wendepunkte des Graphen G_{f_k} in Abhängigkeit von k.

2 1.3 Berechnen Sie nun k so, dass der Graph G_{f_k} an der Stelle $x_0 = 1$ eine waagrechte Tangente besitzt.

1.4.0 Für alle weiteren Teilaufgaben wird k = 12 gesetzt. Die Funktion f_{12} wird im Folgenden kurz mit f bezeichnet, ihr Graph mit G_f.

12 1.4.1 Ermitteln Sie Art und Koordinaten des relativen Extrempunktes sowie sämtlicher Wendepunkte des Graphen G_f.

10 1.4.2 Begründen Sie, dass die Funktion f zwischen den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ genau eine Nullstelle besitzt.

Führen Sie ausgehend vom Startwert $x_1 = 0$ drei Schritte des Newtonverfahrens durch. Geben Sie auch die für die Berechnung notwendigen Teilergebnisse an.

5 1.4.3 Zeichnen Sie den Graphen G_f für $0 \le x \le 5$. Verwenden Sie dazu die bisherigen Ergebnisse sowie die in Teilaufgabe 1.4.2 näherungsweise bestimmte Nullstelle und berechnen Sie zusätzlich die Funktionswerte f(3) und f(5).

Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 2 cm.

Fortsetzung s. nächste Seite

BE Fortsetzung A II

5 1.4.4 Die Gerade mit der Gleichung $y = 4$ schließt mit dem Graphen G_f zwischen den Stellen $x_1 = 0$ und $x_3 = 4$ ein endliches Flächenstück ein.

Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in der vorhandenen Zeichnung und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts.

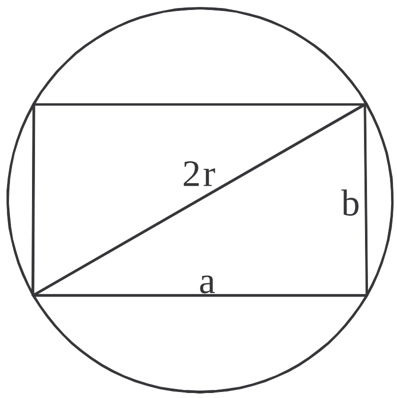
5 2 Gegeben ist nun die reelle Funktion

$$p: x \mapsto x^2 + 1;\; D_p = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}.$$

Bestimmen Sie diejenigen x-Werte mit $x \in D_p$, für die gilt: $\left|p(x) - p(2)\right| < \frac{1}{10}$

.

11 3 Aus einer kreisförmigen Rasenfläche mit dem Radius $r = 5$ (L.E.) soll für ein Blumenbeet eine rechteckige Fläche mit den Seiten a und b so ausgestochen werden, dass dieses Rechteck dem Kreis einbeschrieben ist (siehe Skizze). Die von a abhängige Maßzahl des Flächeninhalts des Rechtecks wird mit A(a) bezeichnet.



Berechnen Sie, wie lang die Seite a sein muss, damit die Größe $g(a) = \left(A(a)\right)^2$ (und damit auch $A(a)$) den absolut größten Wert annimmt und ermitteln Sie auch die absolut größte Flächenmaßzahl. Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

(Teilergebnis: $g(a) = 100a^2 - a^4$)

—

60

Aufgabengruppe S

S I

BE

Eine Urne enthält sechs rote und vier weiße Kugeln, die sich nur durch ihre Farbe unterscheiden. Außerhalb der Urne stehen noch genügend viele rote und weiße Kugeln als zusätzlicher Kugelvorrat zur Verfügung.

Ein Zufallsexperiment besteht darin, dass nacheinander drei Kugeln zufällig aus der Urne gezogen werden, wobei nach jeder entnommenen Kugel eine andersfarbige Kugel aus dem Kugelvorrat wieder in die Urne gelegt wird.

6 1 Zeichnen Sie zu dem beschriebenen Zufallsexperiment ein Baumdiagramm und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse.

(Teilergebnis: $P(\{RRR\}) = 0{,}120$; $P(\{WWW\}) = 0{,}024$)

2.0 Es werden nun folgende Ereignisse betrachtet:

A: „Es werden ausschließlich gleichfarbige Kugeln gezogen."

B: „Unter den drei gezogenen Kugeln befinden sich mindestens zwei rote Kugeln."

5 2.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ und $P(B)$. Untersuchen Sie auch, ob die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind.

3 2.2 Drücken Sie das Ereignis $\overline{A} \cap \overline{B}$ möglichst einfach mit Worten aus und berechnen Sie dessen Wahrscheinlichkeit.

5 2.3 Nun wird das Zufallsexperiment unter stets gleichen Anfangsbedingungen zehnmal durchgeführt. Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis A

a) genau dreimal,

b) nur bei den ersten drei Malen,

c) höchstens einmal eintritt.

3.0 Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der roten Kugeln unter den drei gezogenen Kugeln an.

2 3.1 Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X in Tabellenform dar.

Fortsetzung s. nächste Seite

BE | Fortsetzung S I

4 3.2 Zeichnen Sie mit Hilfe einer Wertetabelle den Graphen der kumulativen Verteilungsfunktion der Zufallsgröße X.

4.0 Für die Werte der Zufallsgröße X aus Aufgabe 3 wird bei einem Spiel folgender Gewinn/Verlust-Plan zugrunde gelegt:

x	0	1	2	3
Gewinn bzw. Verlust in DM	a (mit $a \in \mathbb{R}$)	3	-2	-5

4 4.1 Berechnen Sie, wie hoch der Auszahlungsbetrag a angesetzt werden müsste, damit es sich um ein faires Spiel handelt.

4 4.2 Die Wahrscheinlichkeit, bei diesem Spiel einen Geldbetrag zu gewinnen, beträgt exakt p = 0,352. Es werden zehn Spiele unter stets gleichen Anfangsbedingungen durchgeführt.

Untersuchen Sie, ob es günstiger ist, auf das Ereignis
E: „Es werden zwei oder drei Spiele gewonnen“
oder auf das Ereignis $\overline{E}$ zu setzen.

7 5 Bei einem anderen Spiel geht man davon aus, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit p = 0,45 beträgt (Nullhypothese). Im Rahmen eines zweiseitigen Signifikanztests wird das Spiel 100-mal durchgeführt. Geben Sie die Gegenhypothese an und bestimmen Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 1%-Signifikanzniveau.

Wie ist bei obigem Test mit der Nullhypothese zu verfahren, wenn sich bei dessen Durchführung 32 Gewinnspiele ergeben?

40

S II

BE		
	1.0	In einem Kindergarten trinkt jedes der Kinder in der Frühstückspause genau eines der Getränke Kakao, Erdbeermilch bzw. Vanillemilch jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $P(\{K\}) = 0{,}6$, $P(\{E\}) = 0{,}25$ bzw. $P(\{V\}) = 0{,}15$. Nehmen Sie an, dass diese Wahrscheinlichkeiten konstant sind und dass die Entscheidungen für jedes der drei Getränke jeweils unabhängig erfolgen.
5	1.1	Veranschaulichen Sie das Wahlverhalten eines zufällig ausgewählten Kindes an zwei aufeinanderfolgenden Tagen in einem Baumdiagramm. Ermitteln Sie auch die Wahrscheinlichkeiten sämtlicher Elementarereignisse.
6	1.2	Berechnen Sie jeweils, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein zufällig ausgewähltes Kind an fünf aufeinanderfolgenden Tagen a) stets Kakao, b) viermal Kakao und einmal Erdbeermilch, c) niemals Vanillemilch wählt.
	2.0	Nun wird eine Gruppe von 20 Kindern zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Kinder dieser Gruppe an, die für diesen Tag Vanillemilch bestellt haben.
3	2.1	Begründen Sie, dass die Zufallsgröße X binomial verteilt ist und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 1)$.
2	2.2	Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit mindestens zwei der 20 Kinder Vanillemilch wählen.
	3.0	60 % der Kinder des Kindergartens sind Mädchen. Betrachtet werden die beiden Ereignisse E_1: „Ein zufällig ausgewähltes Kind ist ein Mädchen.“ E_2: „Ein zufällig ausgewähltes Kind wählt Erdbeermilch.“ Es sei ferner bekannt, dass $P(\overline{E_1} \cap E_2) = 0{,}10$ gilt.
6	3.1	Zeigen Sie rechnerisch, dass die beiden Ereignisse vereinbar sowie stochastisch unabhängig sind.
4	3.2	Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten: a) $P(E_1 \cup E_2)$; b) $P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2})$.

4.0 Bei einem Kindergartenfest ist die Hauptattraktion ein in acht gleich große Sektoren unterteiltes Glücksrad. Fünf der Sektoren sind rot, zwei grün und einer blau gefärbt. Zur Rotation gebracht, kommt das Rad nach kurzer Zeit zum Stillstand und eine der Farben erscheint in einem Fenster. Bei einem Spiel wird das Glücksrad zweimal nacheinander zur Rotation gebracht. Erscheint beide Male der blaue Sektor, so erhält der entsprechende „Spieler" 10 Gummibärchen als Gewinn, bei zwei grünen Sektoren 8 Bärchen, bei zwei roten 3 Bärchen; in allen anderen Fällen wird 1 Bärchen als „Trostpreis" vergeben.

Die Zufallsgröße Y gibt die Anzahl der in einem Spiel gewonnenen Gummibärchen an.

5 4.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße Y und zeichnen Sie ein zugehöriges Histogramm.

4 4.2 Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Zufallsgröße Y.

5 4.3 Ein Lausbub, der bereits bis 50 zählen kann, hat das Glücksrad „manipuliert", indem er heimlich einen Kaugummi auf die Rückseite des blauen Sektors geklebt hat. Er vermutet, dass der blaue Sektor nun häufiger erscheint (Gegenhypothese). Dazu beobachtet er 50 Drehungen des Rades und glaubt, seine Vermutung als bestätigt ansehen zu können, wenn dabei der blaue Sektor mehr als 10-mal erscheint.

Geben Sie die Testgröße, die Nullhypothese und die Gegenhypothese sowie die Art des vorliegenden Hypothesentests an. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Lausbub seine Vermutung als bestätigt betrachtet, obwohl das Rad durch den Kaugummi in Wirklichkeit nicht beeinflusst wird.

40

1 Gegeben ist die Schar von Funktionen $f_m : x \mapsto f(x) = \frac{x^2 - mx - 3}{2x}$ mit $D_f = 3$ \{0} und m∈ 3.

1.1 Geben Sie das Verhalten von f für $|x| \to \infty$ und für $x \to 0$ an sowie die Gleichungen der Asymptoten des Graphen von f_m an. (6 BE)

1.2 Berechnen Sie die Nullstellen von f_m in Abhängigkeit von m. (3 BE)

1.3 Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f_m und zeigen Sie, dass f_m weder Extremstellen noch Wendestellen besitzt. Erläutern Sie, welche Aus-sage sich über die Graphen zu verschiedenen m-Werten aus der Tatsache ergibt, dass in der 1.Ableitung m nicht vorkommt. (7 BE)

1.4 Nun sei m=2. Zeichnen Sie den Graphen (mit Asymptoten) für $-3 \leq x \leq 5$. Verwenden Sie hierzu die bisherigen Ergebnisse und geeignete Funktions-werte. (5 BE)

1.5 Die x-Achse, die schiefe Asymptote, der Graph von f_2 und die Gerade x=5 begrenzen eine endliche Fläche. Berechnen Sie deren Inhalt auf zwei Dezimalen genau. (5 BE)

2 Gegeben ist die Funktion g: $x \mapsto g(x) = \dfrac{2 \cdot e^{x}}{10 - e^{x}}$ mit der maximalen Defini-tonsmenge $D_g \subseteq$ 3.

2.1 Bestimmen Sie D_g und untersuchen Sie das Verhalten von g(x) bei Annäherung an die Definitionslücke. Ermitteln Sie außerdem die Gleichungen sämtlicher Asymptoten.(6 BE)

2.2 Zeigen Sie, dass g keine Extremstelle und keine Wendestelle besitzt. (6 BE)

2.3 Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $g(x) < -3$. (6 BE)

2.4 Berechnen Sie diejenigen Stellen, an denen die Tangenten an den Graphen von g parallel zur Gerade mit der Gleichung $y= \frac{3}{2}x + 2$ verlaufen. (6 BE)

3 Für den Zusammenhang zwischen der Reizgröße R und der Empfindung E gelte das Weber-Fechnersche Gesetz: $E = K + c \cdot \ln(R)$. Dabei sind K und c positive reelle Zahlen.

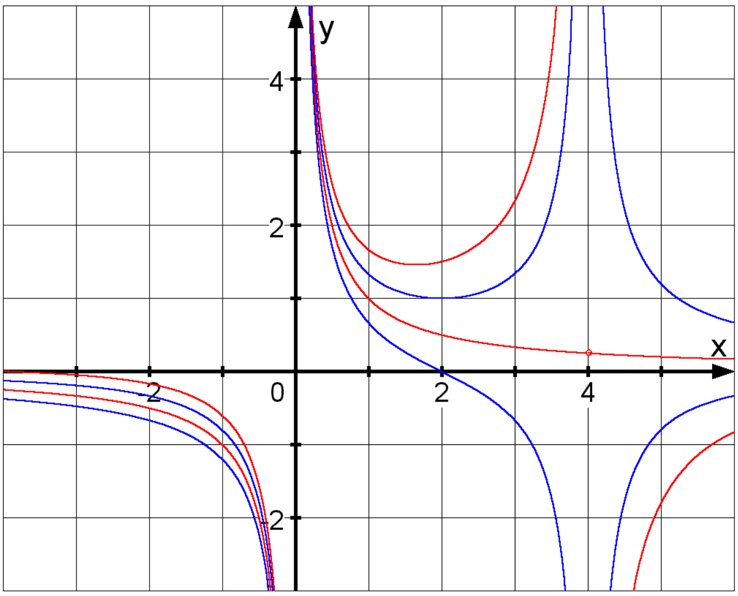
3.1 Für R=2 erhält man E=4 und für R=5 ergibt sich E=6. Berechnen Sie die Konstanten K und c. (4BE)

(Zur Kontrolle: $c \approx 2{,}183$, $K \approx 2{,}487$)

3.2 In einem Versuch darf man das Empfindungsmaximum $E_{max}=10$ nicht überschreiten. Berechnen Sie das hierzu gehörige Reizmaximum. (2 BE)

3.3 Zeigen Sie: Jede Halbierung der Reizgröße vermindert die Empfindung um ca. 1,5 Einheiten. Was bewirkt eine Verzehnfachung des Reizes? (4BE)

1.0 In folgendem Koordinatensystem sind vier Graphen aus der Schar der gebrochen-rationalen Funktionen f_k dargestellt. Dabei ist der Grad der Nennerfunktion 2.



1.1 Welche Aussagen über den Funktionsterm kön-nen aus obiger Angabe, den erkennbaren Definiti-onslücken sowie aus der waagrechten Asymptote $y=0$ aller Graphen ge-folgert werden? Begrün-den Sie die Aussagen. (6BE)

1.2.0 Nun sei $f_k(x) = \dfrac{kx-4}{x^2-4x}$ mit der Definitionsmenge $D(f_k) = \mathbb{R}\backslash\{0;4\}$ und $k \in \mathbb{R}$.

1.2.1 Untersuchen Sie, ob es Graphen der Schar gibt, die <u>auch</u> im II. Quadranten verlaufen. Wenn ja, geben Sie die zugehörigen k-Werte an. (5BE)

1.2.2 Für welchen k-Wert hat die Funktion f_k eine stetig behebbare Defini-tionslücke? Welche Wertemenge hat die zugehörige Funktion? (6BE)

1.2.3 Zeigen Sie, dass es in der Schar zwei Funktionen f_k gibt, die keine Nullstelle haben. (4BE)

1.2.4 Berechnen Sie den k-Wert, für den der Graph von f_k die Extremalstelle $x_0 = 2$ besitzt. Bestimmen Sie die Koordinaten und Art des zugehörigen Extrempunktes. (7BE)

(Teilergebnis: k=0)

1.2.5 Bestimmen Sie in Abhängigkeit von k die reellen Konstanten a und b so, dass die Funktion F_k mit $F_k(x) = a \cdot \ln(4-x) + b \cdot \ln(x)$ für $0 < x < 4$ eine Stammfunktion von f_k ist. (6BE)

(Teilergebnis: a = (k–1); b = 1)

1.2.6 Berechnen Sie die Maßzahl der endlichen Fläche auf 2 Dezimalen, die die Gerade mit der Gleichung $y = 2$ mit dem Graphen von f_0 (also k=0) einschließt. Beachten Sie, dass der Graph von f_0 (siehe auch Aufgabe 1.2.4) in der Grafik dargestellt ist.(8BE)

Fortsetzung nächste Seite

2.0 Die Größe einer Bakterienkultur entwickelt sich nach der Funktion mit der Gleichung M(t) = $s \cdot (2 - e^{-mt})$. Hierbei sind m und s geeignete Zahlen und t die Maßzahl der Zeit in Stunden. Zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt die vorhandene Anfangsmenge 500 Einheiten und zum Zeitpunkt t = 10 ist M(10)= 700 .

2.1 Bestimmen Sie die Parameterwerte s und m aus obigen Angaben. (5BE)

(Ergebnis: s=500, m=$-\dfrac{\ln 0{,}6}{10}$)

2.2 Zeigen Sie, dass die Funktion M für t > 0 streng monoton zunimmt, für $t \to \infty$ einen Grenzwert hat und dass der Graph rechtsgekrümmt ist. (6BE)

2.3 Die Größe M(t)–M(0) wird als Zuwachs von M bezeichnet. Begründen Sie, dass der Zuwachs höchstens 500 Einheiten beträgt, und berechnen Sie die Zeitspanne, in der der Zuwachs 30% der Anfangsmenge beträgt. (7BE)

1.0 Gegeben ist die reelle Funktion

$$f:\ x \mapsto \frac{1}{24}x^4 - \frac{4}{9}x^3 + \frac{4}{3}x^2; \quad D_f = \mathbb{R}.$$

Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird G_f genannt.

1.1 Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktion f genau eine Nullstelle besitzt. (3 BE)

1.2.0 Der Graph G_f hat lediglich in den Punkten $Q(4; \frac{32}{9})$ und N(0; 0) horizontale Tangenten. Zudem sei bekannt, dass der Graph G_f in den Intervallen $]-\infty; \frac{4}{3}]$ sowie $[4; \infty[$ linksgekrümmt und im Intervall $[\frac{4}{3}; 4]$ rechtsgekrümmt ist.

1.2.1 Bestimmen Sie ohne Rechnung nur mit Hilfe dieser Informationen die Abszissen sämtlicher Extrem- und Wendepunkte des Graphen G_f . Geben Sie auch mit Begründung an, um welche Art von Extrempunkt es sich jeweils handelt und ob sich unter den Wendepunkten ggf. Terrassenpunkte befinden. (9 BE)

1.2.2 Zeichnen Sie den Graphen G_f für $-1 \le x \le 6$. Verwenden Sie dazu die bisherigen Angaben und Ergebnisse und berechnen Sie zusätzlich die Funktionswerte $f(-1)$, $f(\frac{4}{3})$, $f(3)$, $f(5)$ und $f(6)$.

Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm. (6 BE)

1.2.3 Zeichnen Sie im Koordinatensystem von Aufgabe 1.2.2 für $-1 \le x \le 6$ farbig (nicht rot!) die Menge $M = \{ P(x; f(x)) \in G_f \mid f'(x) > 0 \wedge f''(x) > 0 \}$ ein.
Eine Rechnung ist dazu nicht erforderlich. (3 BE)

1.3 Gegeben ist nun noch das Viereck OPQR mit den Eckpunkten
$O(0; 0)$, $P(2; 0)$, $Q(4; \frac{32}{9})$ und $R(0; \frac{32}{9})$.

Zeichnen Sie das Viereck OPQR in das Koordinatensystem von Aufgabe 1.2.2 und berechnen Sie, in welchem Verhältnis der Graph G_f den Flächeninhalt dieses Vierecks teilt. (10BE)

1.4.0 Gegeben sind ferner die reellen Funktionen

$$g_a : x \mapsto \frac{1}{24}x^4 - \frac{4}{9}x^3 + (1-a^2) \quad \text{mit } a \in \mathbb{R} \text{ und } D_{g_a} = \mathbb{R}.$$

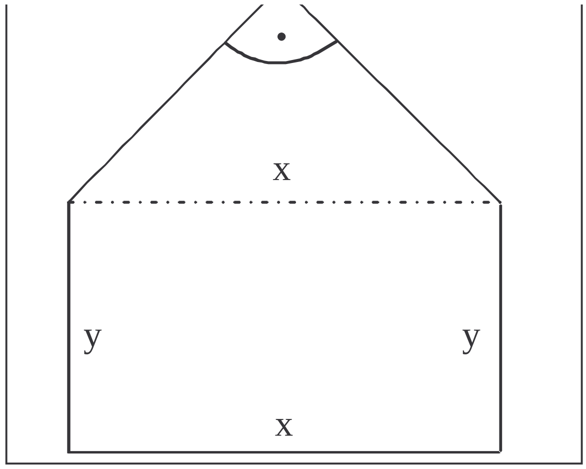
Der Graph einer solchen Funktion g_a in einem kartesischen Koordinatensystem wird G_{g_a} genannt.

1.4.1 Bestimmen Sie die Abszissen derjenigen Punkte, in denen der Graph G_{g_a} horizontale Tangenten aufweist. Erläutern Sie auch, um welche Art von Punkten es sich dabei jeweils handelt. (5 BE)

1.4.2 Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a die Abszissen und die Anzahl der gemeinsamen Punkte der Graphen G_{g_a} und G_f (siehe 1.0). (8 BE)

1.4.3 In dieser Teilaufgabe ist $a > 1$. Berechnen Sie denjenigen Wert von a, für den die Fläche zwischen den Graphen G_f und G_{g_a} sowie den Geraden mit den Gleichungen $x = 0$ und $x = 3$ den Inhalt 21 FE annimmt. (6 BE)

2.0 Herr K. plant den Einbau eines Dachfensters. Dieses soll die Form eines Rechtecks mit darübergesetztem gleichschenklig-rechtwinkligem Dreieck haben (siehe Skizze!). Der Umfang U des gesam-ten Fensters beträgt 6 m.



2.1 Stellen Sie zunächst die Maßzahl G(x) der Gesamtfläche des Fensters in Abhängigkeit von der Rechtecksbreite x dar. Ermitteln Sie auch die Definitionsmenge D_G der Funktion G: $x \mapsto G(x)$.

(Ergebnisse: $G(x) = 3x - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot x^2$; $D_G = \left]0;\frac{6}{1+\sqrt{2}}\right[$.) (6 BE)

2.2 Berechnen Sie dann denjenigen Wert von x, für den die Flächenmaßzahl G(x) ihren absolut größten Wert annimmt. Runden Sie dabei auf drei Nachkommastellen. (4 BE)

Lösungen zum Analysis–Nachtermin

1.1 $f(x) = 0 \iff x^2(3x^2 - 32x + 96) = 0$

$x_{1/2} = 0 \ \vee\ 3x^2 - 32x + 96 = 0$. Diskriminante D = 1024 – 1152 < 0, daher keine weitere Lösung. Also: $x_{1/2} = 0$ einzige Nullstelle. (3 BE)

1.2.1 Bei $x_Q = 4$ ändert sich das Krümmungsverhalten des Graphen; zudem besitzt er dort eine horizontale Tangente. Der Punkt Q ist Terrassenpunkt von G_f.
Bei $x_O = 0$ besitzt G_f eine horizontale Tangente und ist in einer Umgebung des Punktes O linksgekrümmt: O ist ein relativer Tiefpunkt.

Bei $x_W = \frac{4}{3}$ ändert sich das Krümmungsverhalten von G_f, der Graph besitzt im Punkt W aber keine waagrechte Tangente: es handelt sich um einen Wendepunkt, aber keinen Terrassenpunkt. (9 BE)

1.2.2

x	–1	0	1,33	3	4	5	6
f(x)	1,82	0	1,45	3,38	3,56	3,82	6

(Graph siehe Anhang) (6 BE)

1.2.3 (siehe Anhang) (3 BE)

1.3 (Zeichnung im Anhang)

$$A_1 = \int_0^4 f(x)dx = \left[\frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{9}x^4 + \frac{4}{9}x^3\right]_0^4 = \frac{128}{15}$$

Dreieck: $A_2 = \frac{1}{2}\cdot(x_Q - x_P)\cdot y_Q = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{32}{9} = \frac{32}{9}$

Trapez OPQR: $A_3 = \frac{1}{2}\cdot(2+4)\cdot\frac{32}{9} = \frac{32}{3}$

Untere Teilfläche: $A_u = A_1 - A_2 = \frac{128}{15} - \frac{32}{9} = \frac{384-160}{45} = \frac{224}{45}$

Obere Teilfläche: $A_o = A_3 - A_u = \frac{32}{3} - \frac{224}{45} = \frac{480-224}{45} = \frac{256}{45}$

Teilverhältnis: $A_o : A_u = 8 : 7$. (10 BE)

1.4.1 $g_a'(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{4}{3}x^2 = \frac{1}{6}x^2(x-8)$

Horizontale Tangenten, wenn $g_a'(x)=0$, also für x = 0 sowie x = 8.

$g_a''(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{8}{3}x$; $g_a'''(x) = x - \frac{8}{3}$. Da $g_a''(8) = \frac{32}{3} > 0$, ergibt sich für x = 8 ein relativer Tiefpunkt.

Da $g_a''(0) = 0 \wedge g_a'''(0) \neq 0$, ergibt sich für x = 0 ein Terrassenpunkt. (5 BE)

1.4.2 $f(x) = g_a(x) \iff \frac{4}{3}x^2 = (1-a^2)$

(1) Keine Lösungen sind möglich, wenn $1 - a^2 < 0 \iff a > 1 \vee a < -1$.

(2) Genau einen gemeinsamen Punkt (Berührpunkt) gibt es, wenn $1 - a^2 = 0$, also für $a = -1 \vee a = 1$. In beiden Fällen ergibt sich die Abszisse $x_{1/2} = 0$.

(3) Zwei verschiedene (Schnitt–) Punkte der Graphen gibt es, wenn $1 - a^2 > 0 \iff -1 < a < 1$. Die Abszissen dieser Punkte sind: $x_{1/2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3(1-a^2)}$. (8 BE)

1.4.3 Für a > 1 besitzen (nach Teilaufgabe 1.4.2) die Graphen keinen gemeinsamen Punkt.

Daher ist der gesuchte Flächeninhalt:

$$\int_0^3 (f(x) - g_a(x))dx = \int_0^3\left(\frac{4}{3}x^2 - (1-a^2)\right)dx = \left[\frac{4}{9}x^3 + (a^2-1)x\right]_0^3 =$$

$= 12 + (a^2 - 1)\cdot 3 = 9 + 3a^2$.

$9 + 3a^2 = 21 \iff 3a^2 = 12 \iff a^2 = 4$. Wegen a > 1 ist dann: a = 2. (6 BE)

2.1 Die Kathetenlänge L im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse x beträgt nach Pythagoras $L = \frac{x}{2}\sqrt{2}$. Demnach ist der Umfang U des Fensters:

$U = x + 2y + 2\cdot\frac{x}{2}\sqrt{2} = 2y + (1+\sqrt{2})x$.

Da andererseits U = 6 sein soll, erhält man $y = 3 - \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})x$.

x > 0 ist trivial, y > 0 ebenfalls leicht nachvollziehbar.

Aus letzterer Ungleichung ergibt sich: $x < \frac{6}{1+\sqrt{2}}$ ($\approx 2{,}485$) und damit folgt die im Teilergebnis gegebene Definitionsmenge.

Für die Flächenmaßzahl des Gebildes erhält man: $G(x) = xy + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\sqrt{2}\right)^2$

bzw. $G(x) = 3x - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{4}\right)x^2$. (6 BE)

2.2 $G'(x) = 3 - \left(\sqrt{2}+0{,}5\right)x$. Aus $G'(x) = 0$ erhält man $x = \frac{3}{\sqrt{2}+0{,}5} \approx 1{,}567$.

Da der Graph G_G Teil einer nach unten geöffneten Parabel ist, deren Scheitelpunkt im betrachteten Intervall liegt, nimmt die Funktion G ihr absolutes Maximum an der Stelle $x \approx 1{,}567$ an. (4 BE)

(60 BE)

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen
$f_a : x \mapsto f_a(x);\ D_{f_a} = \mathbb{R}$

$$f_a(x) = \frac{1}{27} \cdot (ax^3 + 27x) \quad \text{mit } a \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0.$$

Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_{f_a} bezeichnet.

1.1 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f_a in Abhängigkeit von a. (5 BE)

1.2 Bestimmen Sie die maximalen Intervalle, in denen die Funktion f_a echt monoton zu- bzw. abnimmt. (6 BE)

1.3 Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f_a(x) + f_a(-x) = 0$.
Welche Folgerung ergibt sich hieraus für den Graphen G_{f_a}? (3 BE)

1.4.0 Setzen Sie in den folgenden Teilaufgaben a = 1.

1.4.1 Bestimmen Sie die Koordinaten desjenigen Punktes des Graphen G_{f_1}, in dem die Steigung den geringsten Wert besitzt. Geben Sie auch den Wert der kleinstmöglichen Steigung an. (5 BE)

1.4.2 Zeichnen Sie den Graph G_{f_1} mit Hilfe einer geeigneten Wertetabelle
für $-6 \leq x \leq 6$.
Maßstab: x-Achse 1 LE = 1 cm; y-Achse: 1 LE = 0,5 cm (6 BE)

1.4.3 Berechnen Sie $m \in \mathbb{R}$ so, dass gilt: $\int_0^6 m\,dx = \int_0^6 f_1(x)\,dx$. (5 BE)

1.5.0 Gegeben ist ferner die Menge der Geraden G_{g_k}
mit $g_k(x) = 2x + k$; $k \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$.

1.5.1 Beschreiben Sie kurz die Lage dieser Geraden zueinander und bestimmen Sie die Gleichungen derjenigen beiden Geraden, die Tangenten an G_{f_1} (Teilaufg. 1.4.2) sind.
(Zwischenergebnis: $k_1 = 2$; $k_2 = -2$.) (7 BE)

1.5.2 Setzen Sie in dieser Teilaufgabe k = 2 sowie k = –2 und zeichnen Sie die zu-gehörigen Geraden G_{g_2} sowie $G_{g_{-2}}$ in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1.4.2 ein. (2 BE)

1.5.3 Geben Sie die Anzahl der gemeinsamen Punkte der Graphen G_{f_1} und G_{g_k} in Abhängigkeit von k an. (5 BE)
(Hinweis: Eine Begründung wird nicht erwartet!)

1.6 Die Parabel G_p ist der Graph einer quadratischen Funktion $p: x \mapsto p(x)$, $x \in$ R. Diese Parabel berührt den Graphen G_{f_1} an der Stelle $x_0 = 3$ und enthält den Punkt Q(5; 6).
Bestimmen Sie den Funktionsterm p(x) der Funktion p. (7 BE)

2 Unten stehende Abbildung zeigt den Querschnitt eines „auf dem Kopf stehenden“ Schiffsrumpfes. Er soll durch ein Trapez aus Balken stabilisiert werden.
Der genannte Querschnitt wird durch den Graphen der Funktion h
mit $h(x) = -0{,}25x^2 + 1$; $D_h = [-2; 2]$ sehr gut beschrieben.

Berechnen Sie die Abszisse $u \in]0; 2[$ des Punktes P(u; h(u)) so, dass der Flächeninhalt des Trapezes sein absolutes Maximum annimmt.
(Mögliches Zwischenergebnis für den Flächeninhalt des Trapezes:
$A(u) = -\frac{1}{4}u^3 - \frac{1}{2}u^2 + u + 2$.) (9 BE)

1 Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto (2 - \ln(x)) \cdot (2 + \ln(x))$ mit maximaler Definitionsmenge $D_f \subset \mathbb{R}$.

1.1 Bestimmen Sie D_f und die Nullstellen von f und untersuchen Sie das Ver-halten von f(x) an den Rändern der Definitionsmenge. (5BE)

1.2 Ermitteln Sie die Art und die Lage des Extrempunktes sowie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen von f (Nachweis ohne Ver-wendung der dritten Ableitung). (9BE)

(Zwischenergebnis: $f'(x) = -2 \cdot \frac{\ln(x)}{x}$)

1.3 Stellen Sie die Gleichung der Wendetangente t des Graphen von f auf. Zeichnen Sie die Tangente t und den Graphen von f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse für $x \in]0; 10]$ in ein kartesisches Koordinatensystem. (6BE)

1.4 Bestimmen Sie die reellen Koeffizienten a, b und c so, dass die Funktion F: $x \mapsto ax \cdot ((\ln(x))^2 - bx \cdot \ln(x) + cx)$ in D_f eine Stammfunktion von f ist, und berechnen Sie den Inhalt der endlichen Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt. (10BE)

2 Nun ist die Funktion $g:\ x \mapsto g(x) = \dfrac{x^3 - 2x + 2}{x^2}$ mit Definitionsmenge $D_g = \,]0;\infty[$ gegeben.

2.1 Begründen Sie durch eine genaue Untersuchung der Zählerfunktion, dass g keine Nullstelle besitzt. (5BE)

2.2 Zeigen Sie, dass der Graph von g für x > 1 stets unterhalb seiner schiefen Asymptote verläuft. Berechnen Sie sodann den Inhalt der endlichen Fläche, die der Graph von g für $x \geq 1$ mit der Asymptoten und der Gerade x=3 einschließt. (7BE)

3 Ein Kubikzentimeter Kuhmilch enthielt <u>2 Stunden nach dem Melken</u> 2824 Keime, eine weitere Stunde später 3389 Keime. Mit a(t) werde die Anzahl der Keime zum Zeitpunkt t (in Stunden) bezeichnet, mit a_0 die Anzahl der Keime zum Zeitpunkt t = 0 und mit k die Wachstumskonstante. Innerhalb eines gewissen Zeitintervalls $[0; t_0]$ gelte: $a(t) = a_0 \cdot e^{kt}$. Auf Benennungen wird bei der Rechnung verzichtet.

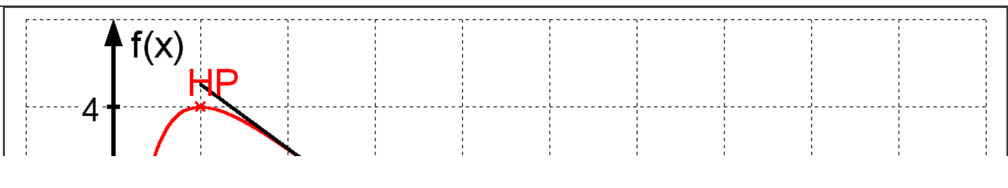
3.1 Bestimmen Sie a_0 und k. (5BE)
(Zur Kontrolle: $a_0 = 1961$; $k = \ln(1{,}2)$)

3.2 Berechnen Sie denjenigen Zeitpunkt t_1, an dem die Keimzahl 5000 pro cm^3 Milch beträgt. (2BE)

3.3 Durch zunehmendes Absterben der Keime verläuft die Keimzahl ab dem Zeitpunkt t_2 = 5,19 h nach der Funktion b mit $b(t) = 1000 \cdot t \cdot e^{-0{,}001 \cdot t^2}$. Zeigen Sie, dass der Übergang der Funktionen a und b (im Rahmen der Rundungsgenauigkeit) stetig und differenzierbar erfolgt. (7BE)

3.4 Untersuchen Sie, zu welchem Zeitpunkt die Keimzahl ihren größten Wert erreicht und berechnen Sie diese Keimzahl. (4BE)

Nr.	Lösungsvorschlag A I	BE
1.1	$D_f = IR^+$. f(x)=0 $\Leftrightarrow x=e^{-2}$ v $x=e^2$. $x \to \infty$: $f(x)=\underbrace{(2-\ln x)}_{\to -\infty}\underbrace{(2+\ln x)}_{\to \infty} \to -\infty$. $x \to 0$: $f(x) = \underbrace{(2-\ln x)}_{\to \infty}\underbrace{(2+\ln x)}_{\to -\infty} \to -\infty$	5
1.2	$f'(x) = \dfrac{-2\ln x}{x}$; $f''(x) = \dfrac{2\ln x - 2}{x^2}$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow -2\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $f''(1) = -2 < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt H(1/4) $f''(x)=0 \Leftrightarrow 2\ln x = 2 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$; Z von f´´(x) ist streng monoton steigende Fkt. mit VZW $\Rightarrow$ Wendepunkt W(e/3)	9
1.3	t: $y = f'(x_0)\,(x-x_0) + f(x_0)$; Daten von W eingesetzt: t: $y = -\frac{2}{e}x + 5$	



		6
1.4	$F'(x)= a(\ln x)^2+ax\cdot 2(\ln x)\cdot(1/x)-b\ln x-b+c = a(\ln x)^2+(2a-b)\ln x+(c-b)$ $f(x)= -(\ln x)^2 + 4$; Koeffizientenvergleich ergibt: $a=-1 \wedge b=-2 \wedge c=2$. $\int_{e^{-2}}^{e^2} f(x)dx = [F(x)]_{e^{-2}}^{e^2} = -4e^2+4e^2+2e^2-(-4e^{-2}-4e^{-2}+2e^{-2}) =$ $= 2e^2+6e^{-2}$ $A \approx 15{,}59$ FE.	10
2.1	Da der Nenner stets positiv ist, wird das Vorzeichen von g durch das Vorzeichen des Zählers Z bestimmt. Nun gilt: $Z'(x)=3x^2-2$, also ist $Z'(x)$ für $0<x<\sqrt{\frac{2}{3}}$ negativ und für $x>\sqrt{\frac{2}{3}}$ positiv. Damit hat Z an der Stelle $x=\sqrt{\frac{2}{3}}$ das absolute Minimum $Z(\sqrt{\frac{2}{3}}) \approx 0{,}91>0$, also hat Z und damit g keine Nullstelle.	5
2.2	$g(x)= x - \frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}$; schiefe Asymptote $a(x)= x$; $a(x)-g(x) = \frac{2x-2}{x^2} >0$ für $x>1$. $A=\int_1^3 (a(x)-g(x))dx = \int_1^3 (\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2})dx = \left[2\ln(x)+\frac{2}{x}\right]_1^3 = 2\ln 3+\frac{2}{3}-2 = 2\ln 3-\frac{4}{3}$	7
3.1	(1) $2824 = a_0\, e^{2k}$ (2) $3389 = a_0\, e^{3k} \Rightarrow \frac{2824}{e^{2k}} = \frac{3389}{e^{3k}} \Rightarrow e^k = \frac{3389}{2824} \Rightarrow k = \ln 1{,}2$; $a_0 = 1961$	5

Nr.	**Fortsetzung Lösungsvorschlag A I**	BE
3.2	$5000=1961\cdot e^{kt_1} \Leftrightarrow t_1 = \frac{1}{k}\ln(\frac{5000}{1961}) = 5{,}13h$; Antwort: nach 5,13h ist die Keimzahl 5000 erreicht.	2

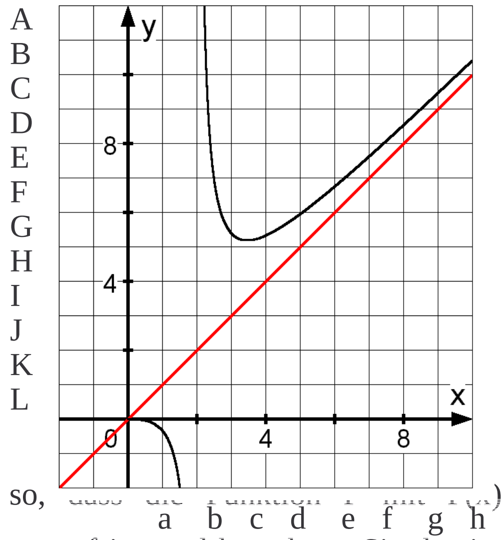
3.3	$\lim_{t \to 5{,}19} a(t) = 5052$; $\lim_{t \to 5{,}19} b(t) = 5052$, d.h. der Übergang verläuft stetig. $a'(t)=k \cdot a_0 \cdot e^{kt}$; $\lim_{t \to 5{,}19} a'(t) = 921$; $b'(t)=1000 \cdot (e^{-0{,}001t^2} - 0{,}002 \cdot t^2 \cdot e^{-0{,}001t^2})$ $\lim_{t \to 5{,}19} b'(t) = 921$. Wegen der Gleichheit beider Grenzwerte ist der Übergang (im Rahmen der Rundungsgenauigkeit !) differenzierbar.	7
3.4	Da die Funktion a streng monoton steigend ist, kann die max. Keimzahl nur für t>5,19 h erreicht werden: $b'(t)=0$: $1-0{,}002t^2=0$; $t=\sqrt{500} \approx 22{,}36$. $b'(t)$ hat bei diesem t-Wert den einzigen Vorzeichenwechsel von + nach -: globa-les Maximum. Antw.: Nach 22,36 h ist die maximale Keimzahl b(22,36)=13562 Keime erreicht.	4
		60

1.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{x^3}{x^2-4}$ mit der Definitionsmenge $D(f) = \mathbb{R}\setminus\{-2; 2\}$.

1.1 Zeigen Sie, dass der Graph von f punktsymmetrisch zum Ursprung ist, untersuchen Sie das Verhalten von f(x) für $x \to 2$, und ermitteln Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen von f. (9BE)

1.2 Bestimmen Sie ohne Verwendung der zweiten Ableitung die exakten Koor-dinaten und die Art der Extrempunkte des Graphen von f. (10BE)

1.3 In nebenstehender Grafik sind die W kelhalbierende des I. Quadranten sowie der Gra von f für $0 \le x \le 10$ einge-tragen. Ermitteln aus der Grafik einen ganzzahligen Näherungsw für das Integral $\int_4^8 (f(x) - x)dx$. Erläutern Sie I Überlegungen mit Hilfe der eingezeich-ne Quadrate, die mit Buchstabenkombinatio bezeichnet werden. (5BE)



1.4 Bestimmen Sie die reellen Parameter a und b so, dass die Funktion F mit F(x) = $a x^2 + b \cdot \ln(x^2 - 4)$ für $x > 2$ eine Stammfunktion von f ist, und berechnen Sie damit das Integral von Aufgabe 1.3 zur Kontrolle auf eine Nachkommastelle gerundet. (8BE)

(Teilergebnis: a = 0,5; b = 2)

1.5 Nun wird die Schar von Funktionen f_m mit $f_m(x) = \frac{mx^3}{x^2-4}$ und $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ in der Definitionsmenge D(f) betrachtet. Begründen Sie, welchen Einfluss der Parameter m auf den Verlauf des Graphen von f_m im Vergleich zum Graphen von f hat. Gehen Sie dabei auf die Fälle $m > 0$, $m < 0$, $|m| < 1$ und $|m| > 1$ ein. Geben Sie die Gleichungen der Asymptoten sowie die Koordinaten und die Art der Extrempunkte des Graphen von f_m an. (8BE)

2.0 Gegeben ist nun die Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{\ln x}$ und $D(g) \subset \mathbb{R}$.

2.1 Ermitteln Sie die maximale Definitionsmenge D(g), und zeichnen Sie den Graphen der Logarithmusfunktion $x \mapsto \ln x$ für $0 < x \le 8$. Bestimmen Sie anhand dieser Skizze das Verhalten von g(x) bei Annäherung an die Ränder von D(g) sowie das Monotonieverhalten des Graphen von g. Skizzieren Sie nun auch den Graphen von g in das gleiche Koordinatensystem. (7BE)

2.2 Zeigen Sie, dass die Beziehung $g(\frac{1}{x}) = -g(x)$ für alle $x \in D(g)$ richtig ist, und skizzieren Sie den Graphen von $g(\frac{1}{x})$ mit anderer Farbe in die Skizze von Aufgabe 2.1. (4BE)

3.0 Bei Bergwanderungen kann man mit Hilfe eines Luftdruckmessgerätes den Höhenunterschied bezüglich der Startposition bestimmen. Hierbei wird die barometrische Höhenformel $p(h) = p_0 \cdot e^{-k \cdot h}$ verwendet, wobei p_0 der Luftdruck am Startort (also in der Höhe 0m), p(h) der Luftdruck nach h zurückgelegten Höhenmetern und k eine Gerätekonstante ist.

3.1 Nun sei p_0=750 hPa (=Hektopascal) und $k = \frac{1}{8000}\frac{1}{m}$. Berechnen Sie den Luftdruck in den Höhen 100m, 500m und 1000m über dem Startpunkt in hPa auf ganze Zahlenwerte gerundet.. (3BE)

3.2 Berechnen Sie, in welcher Höhe h sich der Bergsteiger über dem Aus-gangsniveau befindet, wenn das Gerät 720 hPa anzeigt. (3BE)

3.3 Erläutern Sie, weshalb und unter welcher Einschränkung folgende Aussage gilt: Wenn in der Höhe h_0 der Luftdruck $p(h_0)$ herrscht, so herrscht in der Höhe $h = h_0 + \varepsilon$ annähernd der Luftdruck $p(h) \approx p(h_0) \cdot (1 - k \cdot \varepsilon)$. (3BE)

(Hinweis: Verwenden Sie die Tangentengleichung im Punkt $P(h_0 | p(h_0))$.)

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen

$$f_k\colon x \mapsto \frac{x^2}{k} - 2x + k \quad \text{mit } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,;\ D_{f_k} = \mathbb{R}$$

und

$$F\colon\ x \mapsto \frac{x^3}{12} - x^2 + 4x - \frac{11}{3}\,;\ D_F = \mathbb{R}.$$

Die Graphen der Funktionen f_k und F in einem kartesischen Koordinatensystem heißen G_{f_k} und G_F.

1.1.1 Zeigen Sie, dass die Scheitelpunkte aller Parabeln G_{f_k} auf der x-Achse liegen. Geben Sie die Wertemenge W_k der Funktion f_k in Abhängigkeit von k an. (5 BE)

1.1.2 Zeichnen Sie für den Sonderfall k = 4 die Parabel G_{f_4} für $0 \le x \le 8$. Verwenden Sie dazu eine gesonderte DIN-A4-Seite im Hochformat mit der x-Achse in der Seitenmitte. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm. (3 BE)

1.2.1 Zeigen Sie, dass für einen geeigneten Wert von k die Funktion F eine Stammfunktion der zugehörigen Funktion f_k ist.
Bestimmen Sie außerdem das Monotonieverhalten der Stammfunktion F. Untersuchen Sie, ob der Graph G_F relative Extrempunkte besitzt. (6 BE)

1.2.2 Ermitteln Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen G_F. Welche besondere Eigenschaft hat dieser Wendepunkt? (4 BE)

1.2.3 Weisen Sie nach, dass sich die Graphen G_{f_4} (k = 4) und G_F im Punkt P(2; y_P) senkrecht schneiden und dass der Punkt P der einzige Punkt ist, den die beiden Graphen gemeinsam haben. (9 BE)

1.2.4 Zeichnen Sie den Graphen G_F mit Hilfe bisheriger Ergebnisse und einer geeigneten Wertetabelle für $0 \leq x \leq 8$ in das unter Teilaufgabe 1.1.2 beschriebene Koordinatensystem ein. (5 BE)

1.2.5 Die y-Achse und die Graphen G_{f_4} und G_F begrenzen im I. und IV. Quadranten des Koordinatensystems ein Flächenstück. Berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. (6 BE)

1.3.0 Der Graph G_g der reellen Funktion g: $x \mapsto g(x)$; $D_g = \mathbb{R}$ mit

$g(x) = \frac{1}{4}(-x^3 + ax^2 + bx + c)$ schneidet die x-Achse an der Stelle $x_0 = 2$

und hat den relativen Tiefpunkt T(4; -5).

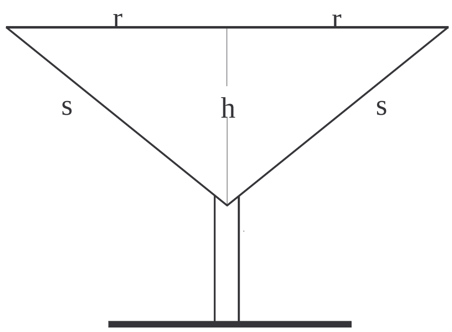
1.3.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm g(x). (7 BE)

1.3.2 Mit den Angaben für $f_4(x)$ (k = 4) und F(x) aus 1.0 gilt für den Funktionsterm g(x) die folgende Beziehung: $g(x) = 3 \cdot \left(f_4(x) - F(x)\right)$ (Beweis nicht erforderlich).

Es sei x_H die Abszisse des Hochpunktes H des Graphen G_g. Beweisen Sie nur mit Hilfe der eben genannten Beziehung ohne die Stelle x_H zu berechnen die folgende Aussage: „An der Stelle x_H haben die Graphen G_{f_4} und G_F parallele Tangenten."

Begründen Sie auch ohne Rechnung, dass diese parallelen Tangenten nicht zusammenfallen können. (4 BE)

2 Der Kelch eines Eisbechers soll die Form eines auf der Spitze stehenden geraden Kreiskegels erhalten (siehe Skizze des Achsenschnittes; die Dicke der Glaswand werde vernachlässigt). Die Längenmaßzahl der Mantellinie s des Kegels beträgt 12.



Stellen Sie die Volumenmaßzahl V(h) des Kegels in Abhängigkeit von der Kegelhöhe h dar und geben Sie die Definitionsmenge D_V der Funktion V: $h \mapsto V(h)$ an.

Weisen Sie nach, dass die Volumenmaßzahl V(h) für $h_1 = 4\sqrt{3}$ ihren absolut größten Wert annimmt. Zeigen Sie außerdem, dass in diesem Fall die Längenmaßzahlen von Radius r_1 und Höhe h_1 des Kegels im Verhältnis $\sqrt{2} : 1$ stehen.

(Mögliches Teilergebnis: V(h) = $\pi(-\frac{h^3}{3}+48h)$) (11 BE)

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen

$f_k: x \mapsto f_k(x);\quad D_{f_k} = \mathbb{R}$

$$f_k(x) = \frac{1}{4}x^3 - kx + 4 \quad \text{mit } k \geq 0 \wedge k \in \mathbb{R}.$$

Der Graph einer solchen Funktion f_k in einem kartesischen Koordinaten-system wird mit G_{f_k} bezeichnet.

1.1.1 Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes W des Graphen G_{f_k} und begründen Sie, dass der Punkt W Wendepunkt eines jeden Graphen G_{f_k} ist . (Teilergebnis: $x_W = 0$.) (4 BE)

1.1.2 Ermitteln Sie in Abhängigkeit von k die maximalen Intervalle, in denen die Funktion f_k echt monoton zunehmend ist. (5 BE)

1.1.3 Zeigen Sie, dass für einen geeigneten Wert von k die Gerade mit der Gleichung $y = -3x + 4$ Wendetangente des zugehörigen Graphen G_{f_k} ist. (3 BE)

1.2.0 Setzen Sie für die folgenden Teilaufgaben k = 3.

1.2.1 Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f_3 mit ihren Vielfachheiten und zerlegen Sie den Funktionsterm $f_3(x)$ in Linearfaktoren. (7 BE)

1.2.2 Geben Sie unter Verwendung bisheriger Ergebnisse Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen G_{f_3} an und zeichnen Sie diesen Graphen für $-4 \leq x \leq 3$ mit Hilfe einer geeigneten Wertetabelle.

Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm. (7 BE)

1.3.0 Die Parabel G_p ist der Graph der quadratischen Funktion $p: x \mapsto p(x)$; $D_p = \mathbb{R}$. Die Funktion p hat bei $x_0 = -4$ eine Nullstelle. Ihr Graph G_p schneidet den Graphen G_{f3} auf der y-Achse und hat in diesem Schnittpunkt die Steigung m = $\frac{1}{3}$.

Fortsetzung s. nächste Seite

Fortsetzung A I

1.3.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm p(x).

(Ergebnis: $p(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x + 4$) (6 BE)

1.3.2 Berechnen Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes der Parabel G_p und zeichnen Sie diese Parabel für $-4 \le x \le 3$ in das vorhandene Koordinatensystem ein. (4 BE)

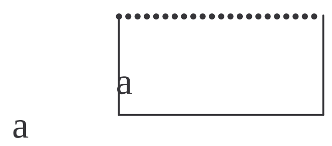
1.3.3 Die Parabel G_p und der Graph $G_{f\,3}$ schließen im II. Quadranten des Koordinatensystems ein Flächenstück ein. Berechnen Sie seinen Flächeninhalt.(5 BE)

1.4.0 Gegeben ist nun die Funktion $s: x \mapsto s(x) = f_3(x) - t(x)$; $D_s = \mathbb{R}$, wobei der Graph G_t die Tangente an die Parabel G_p an der Stelle $x_0 = -4$ ist.

1.4.1 Zeigen Sie, dass sich der Funktionsterm s(x) in der Form $s(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{14}{3}x - \frac{8}{3}$ schreiben lässt. (4 BE)

1.4.2 Begründen Sie, dass die Funktion s im Intervall [–1; 0] <u>genau eine</u> Nullstelle hat . (6 BE)

2.0 Im Geometrie-Unterricht der 5.Klasse findet ein „Wettbewerb“ statt. Jedes der Kinder erhält ein Stück Draht der Länge 15 cm. Durch rechtwinkliges Aufbiegen je eines Stückes der Länge a an beiden Enden soll daraus ein U-förmiges Gebilde entstehen. Denkt man sich nun die beiden Drahtenden durch eine unsichtbare Linie verbunden, so erhält man ein Rechteck (siehe Skizze). Sieger des Wettbewerbs ist dasjenige Kind, dessen Rechteck den größten Flächeninhalt hat.



2.1 Stellen Sie die Maßzahl A(a) der Rechtecksfläche in Abhängigkeit von a dar; bestimmen Sie die Definitionsmenge D_A der Funktion A sinnvoll.

(Teilergebnis: $A(a) = 15a - 2a^2$) (4 BE)

2.2 Berechnen Sie denjenigen Wert von a, für den der Flächeninhalt den absolut größten Wert A_{max} annimmt. Bestimmen Sie auch A_{max}. (5 BE)

1 Gegeben ist die Schar reeller Funktionen $f_m : x \mapsto f_m(x) = \frac{x^2 - m^2}{x - 5}$ mit reellen, <u>positiven</u> Parameterwerten m und der Definitionsmenge $D_m \subset \mathbb{R}$.

1.1 Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge D_m sowie jeweils in Abhängigkeit von m die Nullstellen, die Art der Definitionslücke und das Verhalten von $f_m(x)$ bei Annäherung an die Definitionslücke. (9BE)

1.2 Ermitteln Sie die Gleichungen aller Asymptoten der Graphen vom f_m .(4BE)

1.3 Untersuchen Sie, für welche Werte von m Extrempunkte des Graphen von f_m existieren. (5BE)

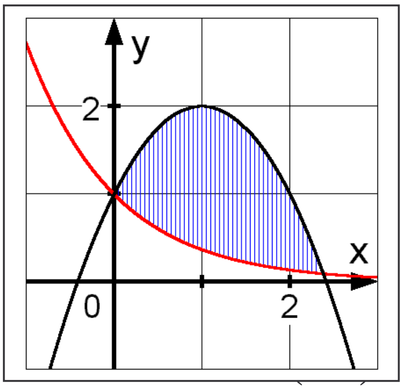
(Zur Kontrolle: $f'_m(x) = \frac{x^2 - 10x + m^2}{(x-5)^2}$)

1.4 Nun sei m = 4. Bestimmen Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus Aufgabe 1.3 die Koordinaten und die Art der lokalen Extrempunkte des Graphen von f_4 , und zeichnen Sie die Asymptoten und den Graphen anhand geeigneter Funktionswerte für $-8 \le x \le 16$ in ein kartesisches Koordinatensystem. (Maßstab auf beiden Achsen: 1LE = 0,5 cm; Platzbedarf beachten) (9BE)

1.5 Der Graph G_{f_4} und die x-Achse schließen ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl des zugehörigen Flächeninhalts. (5BE)

(Hinweis: Zerlegen Sie den Funktionsterm $f_4(x)$ durch Polynomdivision)

2 In nebenstehendes Koordinatensystem ist der Graph der Exponentialfunktion g: $x \mapsto e^{-x}$ und die nach unten geöffnete Normalparabel mit Scheitelpunkt S(1|2) eingetragen.



2.1 Bestimmen Sie zunächst die rechte Schnittstelle beider Graphen unter Verwendung des Newton-Verfahrens näherungsweise (gerundet auf 3 Dezimalen), indem Sie mit dem Startwert $x_0 = 3$ beginnen und zwei Iterationsschritte ausführen.

(Zur Kontrolle: Schnittstelle $x_2 \approx 2{,}385$)

2.2 Berechnen Sie den Inhalt der schraffierten Fläche auf drei Dezimalen. (4BE)

Fortsetzung nächste Seite

Fortsetzung A II

3 Bei der Behandlung einer akuten Virusinfektion durch ein Medikament wird das folgende mathematische Modell zugrunde gelegt: Für die Virenkonzentration n (in Laboreinheiten) x Stunden nach der Medikamenteneinnahme gilt

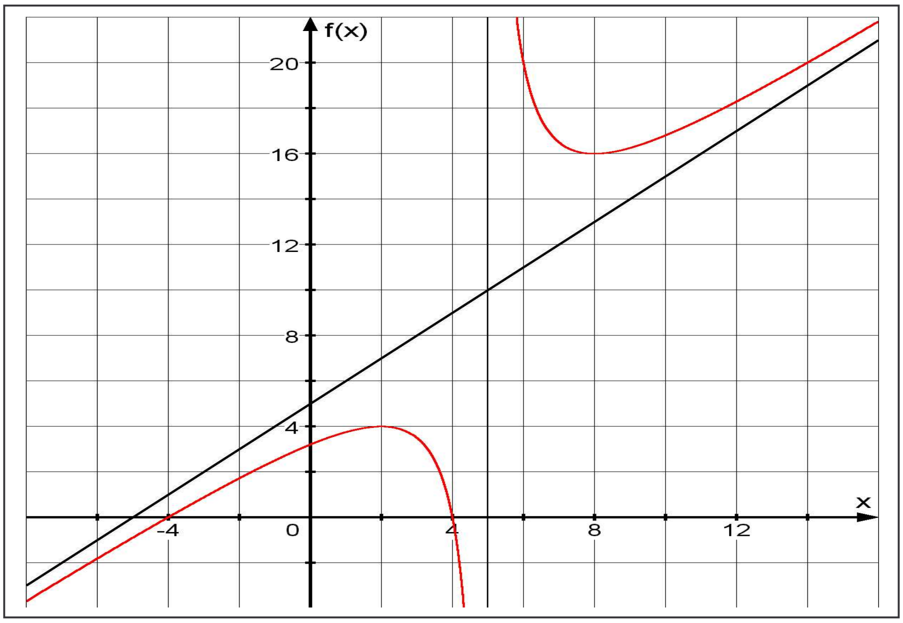
$$n(x) = 20(2x+1) \cdot e^{-0{,}5x} \quad \text{mit } x \geq 0.$$

3.1 Ermitteln Sie, in welchen Zeitintervallen nach der Einnahme des Medikaments die Virenkonzentration zunimmt bzw. abnimmt. Berechnen Sie die größte auftretende Virenkonzentration. (5BE)

3.2 Untersuchen Sie, wie sich die Einnahme des Medikaments langfristig auf die Virenkonzentration auswirkt, wenn obige Gleichung gilt. Verwenden Sie dazu die Regeln von L´Hospital. (3BE)

3.3 Zeigen Sie, dass 18 Stunden nach Einnahme des Medikaments die Nachweisgrenze von $n_0 = 0{,}1$ Laboreinheiten unterschritten ist. (2BE)

3.4 Die Ableitungsfunktion $n´(x)$ der Virenkonzentration hat für $x \geq 0$ einen größten und einen kleinsten Wert. Bestimmen Sie diese beiden Werte $n´(x_0)$ und $n´(x_1)$. Erläutern Sie die Bedeutung des positiven der beiden x-Werte für den Verlauf des Graphen der Funktion n. (7BE)

Nr.	Lösungsvorschlag A II	BE
1.1	$D_m = IR\setminus\{5\}$; für $m \neq 5$: Nullstellen: $x_1 = -m$; $x_2 = m$; für m=5: x= -5 einzige Nst. Faktorisierung: $f_m(x) = \frac{(x-m)(x+m)}{(x-5)}$ Für m = 5: stetig behebbare Definitionslücke an der Stelle x = 5; $\lim\limits_{x\to 5} f_5(x) = 10.$ Für $m \neq 5$: x = 5 ist Unendlichkeitsstelle. Für 0<m<5 gilt: $x \underset{<}{\overset{>}{\to}} 5 :\ f_m(x) \to \pm\infty$, für m>5 gilt: $x \underset{<}{\overset{>}{\to}} 5 :\ f_m(x) \to \mp\infty$, denn im ersten Fall ist Z>0, im zweiten Z<0.	9
1.2	Für $m \neq 5$ ist x=5 senkrechte Asymptote. $(x^2-m^2):(x-5)=x+5+\frac{25-m^2}{x-5}$; der Graph von f_m hat für alle m die schiefe Asymptote mit der Gleichung y=x+5.	4
1.3	$f'(x) = \frac{(x-5)2x-(x^2-m^2)}{(x-5)^2} = \frac{x^2-10x+m^2}{(x-5)^2}$. $f'(x)=0 : x^2 - 10x + m^2 = 0$; einfache Nullstellen, falls D>0; $100-4m^2 > 0 \Leftrightarrow m^2<25 \Leftrightarrow -5<m<5$ und da m>0 : für 0< m <5 hat f_m Extrema.	5
1.4	m=4: $x^2 - 10x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-8)=0$ An der Stelle x=2 VZW von $f'_4(x)$ von + nach -, also H(2/4) An der Stelle x=8 VZW von $f'_4(x)$ von - nach +, also T(8/16).   	9
1.5	Nullstellen: $x_1 = -4$; $x_2 = 4$ (vgl. 1.1) $\int_{-4}^{4} f_4(x)dx = \int_{-4}^{4}(x+5+\frac{9}{x-5})dx = \left[\frac{1}{2}x^2+5x+9\ln\lvert x-5\rvert\right]_{-4}^{4} = 8+20+9\ln 1-(8-20+9\ln 9) =$ $= 40-9\ln 9 \approx 20{,}2$	5

<table>
<tr><td>2.1</td><td>$e^{-x} = -(x-1)^2+2$; $\varphi(x)=e^{-x}+x^2-2x-1$; $\varphi'(x)=-e^{-x}+2x-2$; $x_{i+1}= x_i - \frac{\varphi(x_i)}{\varphi'(x_i)}$
<table>
<tr><td>i</td><td>x_i</td><td>$\varphi(x_i)$</td><td>$\varphi'(x_i)$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>3</td><td>2,050</td><td>3,950</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2,481</td><td>0,2770</td><td>2,878</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2,385</td><td>0,010</td><td></td></tr>
</table></td><td>7</td></tr>
<tr><td>Nr.</td><td></td><td>BE</td></tr>
<tr><td>2.2</td><td>$\int\limits_0^{x_2} (-x^2+2x+1-e^{-x})dx = [\,-\frac{1}{3}x^3+x^2+x+e^{-x}]_0^{x_2} \approx 2{,}643$</td><td>4</td></tr>
<tr><td>3.1</td><td>$n'(x) = 20[2e^{-0,5x}+(2x+1)(-0{,}5)e^{-0,5x}] = 20(\frac{3}{2}-x)e^{-0,5x}$
n nimmt zu für $\frac{3}{2}-x \geq 0$, also für $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$; n fällt für $x \geq \frac{3}{2}$.
$n(\frac{3}{2}) \approx 37{,}8$ Die maximale Konzentration beträgt 37,8 Laboreinheiten.</td><td>5</td></tr>
<tr><td>3.2</td><td>$\lim\limits_{x\to\infty} n(x) = 20\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{e^{0,5x}} = 20\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{0{,}5e^{0,5x}} = 0$ (de L'Hospital)
Die Virenkonzentration geht gegen 0.</td><td>3</td></tr>
<tr><td>3.3</td><td>$n(18)= 20\cdot 37\cdot e^{-9} = 0{,}091 < 0{,}1$ Die Nachweisgrenze ist unterschritten.</td><td>2</td></tr>
<tr><td>3.4</td><td>$n''(x) = (10x-35)\cdot e^{-0,5x}$; $n''(x)=0 \Leftrightarrow x=3{,}5$; da das Vorzeichen von n'' durch den Linearfaktor (10x-35) bestimmt wird und dieser bei x=3,5 das Vorzeichen von - nach + wechselt, hat n' dort also ein Minimum: $n'(3{,}5)\approx -6{,}95$.
Da die Werte von $n'(x)$ nur für x<1,5 positiv und für x<3,5 streng monoton abnehmend sind, hat n' bei x = 0 das Maximum: $n'(0)=30$. Als Extremstelle von n' ist x=3,5 Wendestelle von n.</td><td>7</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>60</td></tr>
</table>

1.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{2}e^{x} - 2x$ mit der Definitionsmenge $D(f) = \mathbb{R}$.

1.1 Untersuchen Sie das Monotonieverhalten des Graphen von f. Schließen Sie daraus auf die Art des Extrempunktes, und berechnen Sie dessen Koordinaten. (6BE)

1.2 Zeigen Sie durch Grenzwertrechnung, dass die Gerade mit der Gleichung $y = -2x$ Asymptote des Graphen von f für $x \to -\infty$ ist, und geben Sie das Verhalten von f(x) für $x \to \pm\infty$ an. (5BE)

1.3 Begründen Sie mit den bisherigen Ergebnissen, dass f genau zwei Nullstel-len besitzt. Berechnen Sie einen Näherungswert für eine Nullstelle, indem Sie zwei Schritte des Newtonverfahrens mit dem Startwert $x_0 = 0$ durch-führen. (7BE)

(Teilergebnis: $x_N \approx 0{,}357$)

1.4 Zeichnen Sie die Asymptote und den Graphen von f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse sowie geeigneter Funktionswerte für $-2 \leq x \leq 3$ in ein kartesisches Koordinatensystem (1LE=1cm). (5BE)

1.5 Berechnen Sie die Maßzahl der endlichen Fläche, die der Graph von f mit den Koordinatenachsen im I.Quadranten einschließt, auf 3 Dezimalen. (4BE)

2.0 Nun ist die Funktion g mit der Funktionsgleichung $g(x) = a \cdot \ln(bx + c) + \frac{1}{2}$ mit $D(g) \subset \mathbb{R}$ und a, b, c $\in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gegeben. Ihr Graph verläuft durch den Punkt $P(0|\frac{1}{2})$, hat dort die Steigung 1 sowie an der Stelle $x = -1$ die Steigung 2.

2.1 Berechnen Sie die Koeffizienten a, b und c. (8BE)

(Ergebnis: a = 2, b = 0,5 , c = 1)

2.2 Bestimmen Sie die größtmögliche Definitionsmenge D(g) und zeigen Sie außerdem, dass der Graph von g in D(g) streng monoton steigt. (4BE)

2.3 Zeigen Sie, dass die Funktion $\varphi : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{für } x < 0 \\ g(x) & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$ mit f aus Aufgabe 1 an der Stelle $x_1 = 0$ stetig ist. Begründen Sie außerdem, dass die Stelle $x_1=0$ eine Minimalstelle von φ ist. (7BE)

3.0 Die Bundesrepublik Deutschland hat im Jahr 2001 eine Bevölkerungszahl von 82 Millionen und eine Bevölkerungsabnahme von 0,1 % pro Jahr. Die Demokratische Republik Kongo hat im gleichen Jahr 52 Millionen Einwohner und eine Bevölkerungszunahme von 3,2 % pro Jahr. Es soll vereinfachend angenommen werden, dass sich in den nächsten 30 Jahren die Wachstumsangaben nicht verändern.

3.1 Erläutern Sie den Ansatz $D(t) = D_0(1 - \frac{1}{1000})^t$ für die Bevölkerungszahl in Deutschland für t>0. Zeigen Sie unter Verwendung der Formel $a^b = e^{b \ln a}$, dass sich damit näherungsweise die Beziehung $D(t) = 8{,}2 \cdot 10^7 \cdot e^{-0{,}0010 \cdot t}$ ergibt, und entwickeln Sie eine analoge Formel für die Bevölkerungszahl K(t) des Kongo. Dabei wird $t = 0$ im Jahr 2001 gesetzt und t in Jahren angegeben. (8BE)

(Teilergebnis: $K(t) = 5{,}2 \cdot 10^7 \cdot e^{0{,}0315 \cdot t}$)

3.2 Berechnen Sie, in welchem Jahr sich die Bevölkerung des Kongo im Vergleich zum Jahr 2001 verdoppelt haben wird und in welchem Jahr die Einwohnerzahlen von Deutschland und Kongo gleich groß sein werden. (6BE)

1.0 Einem Betrieb entstehen bei der Herstellung einer Ware Gesamtkosten, die von der Menge des hergestellten Produkts (kurz: Produktmenge x) abhängen. Beispiel: Die Herstellung von 3 Mengeneinheiten (ME) kostet 30 Geldeinheiten (GE). (Zur Vereinfachung werden für die Berechnungen sämtliche Einheiten weggelassen.)

Um die Problematik mathematisch erfassen zu können wird angenommen, dass die Gesamtkosten durch eine ganzrationale Funktion k dritten Grades beschrieben werden, deren Graph G_k durch die Punkte A(0; 3), B(1; 22), C(2; 29) und D(3; 30) verläuft. Für die Definitionsmenge der Funktion k gilt: D_k = [0; 7].

1.1 Ermitteln Sie den Funktionsterm k(x). (8 BE)

(Ergebnis: $k(x) = x^3 - 9x^2 + 27x + 3$)

1.2 Zeigen Sie, dass die Funktion k auf ihrer gesamten Definitionsmenge echt monoton zunimmt.
Welche Bedeutung hat dieses Ergebnis für die Gesamtkosten? (6 BE)

1.3 Bestimmen Sie den Punkt P des Graphen G_k, für den G_k die geringste Steigung besitzt. Begründen Sie kurz, um welchen besonderen Punkt des Graphen es sich bei P handelt. (4 BE)

1.4 Zeichnen Sie den Graphen G_k bezüglich D_k = [0; 7] mit Hilfe bisheriger Angaben bzw. Ergebnisse und einer geeigneten Wertetabelle in ein rechtwinkliges Koordinatensystem.

Maßstab auf der x-Achse: 1 cm = 1 Mengeneinheit (ME);
Maßstab auf der y-Achse: 1 cm = 10 Geldeinheiten (GE). (5 BE)

2.0 Die Ware wird zu einem Preis von 10 GE pro ME verkauft.
Es ergibt sich demnach als Erlösfunktion die lineare Funktion
$e: x \mapsto 10x$; $D_e = D_k$ = [0; 7].
Der Gewinn bzw. Verlust wird durch die Funktion
$g: x \mapsto e(x) - k(x)$; $D_g = D_k$ beschrieben. Also gilt:
$g(x) = -x^3 + 9x^2 - 17x - 3$.

Fortsetzung s. nächste Seite

2.1 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion g. Runden Sie die Ergebnisse falls nötig auf zwei Nachkommastellen. (5 BE)

2.2 Zeichnen Sie den Graphen G_e der Erlösfunktion e in das Koordinatensystem der Teilaufgabe 1.4 ein und geben Sie mit Hilfe der Zeichnung und des Ergebnisses von Teilaufgabe 2.1 diejenigen Intervalle an, in denen ein Gewinn (g(x) > 0) bzw. ein Verlust (g(x) < 0) erzielt wird. (4 BE)

2.3 Bestimmen Sie jene Produktmenge x_M, für die der Betrieb den absolut größten Gewinn erzielt. Achten Sie auch auf die Ränder der Definitionsmenge. (8 BE)

3.0 Durch Änderungen im Bereich der Produktion ergibt sich eine neue Kostenfunktion f mit $D_f = [0; 7]$, für die gilt:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 9x^2 + 27x + 3 & \text{für } 0 \le x < 3 \\ ax^2 + bx + 66 & \text{für } 3 \le x \le 7 \end{cases} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}.$$

3.1 Berechnen Sie a und b so, dass die Funktion f an der Stelle $x_0 = 3$ stetig und differenzierbar ist. Erläutern Sie, was die Stetigkeit der Funktion f an der Stelle $x_0 = 3$ im Sinne der vorliegenden Thematik bedeutet. (10 BE)

(Teilergebnis: a = 4; b = -24)

3.2 Zeichnen Sie den Graphen G_f der Funktion f mit Farbe in das Koordinatensystem aus 1.4 ein und berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts der Fläche, die von den Graphen G_k und G_f zwischen den Stellen $x_1 = 3$ und $x_2 = 7$ eingeschlossen wird.(10 BE)

Aufg.	A II	BE
1.1	$k(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $k(0) = 3$; $k(1) = 22$; $k(2) = 29$; $k(3) = 30 \Rightarrow k(x)$	8
1.2	$k'(x) = 3x^2 - 18x + 27$; $D_{k'} =]0; 7[$; $k'(x) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 3$ Da $G_{k'}$ eine nach oben geöffnete Parabel mit Scheitel bei (3; 0) ist, gilt k'(x) > 0 für $x \in]0; 3[$ sowie für $x \in]3; 7[$; k ist stetig $\Rightarrow$ k ist in D_k echt monoton zunehmend. Bedeutung: Mit zunehmender Produktmenge x nehmen die Gesamtkosten zu.	6
1.3	Aus (1.2): Geringste Steigung null für x = 3. $\Rightarrow$ P(3; 30) = D Da sich bei P das Monotonieverhalten nicht ändert, ist P ein Terrassenpunkt von G_k .	4
1.4	Wertetabelle, Graph G_k	5
2.1	$-x^3 + 9x^2 - 17x - 3 = 0$; $x_1 = 3$; Polynomdivision; $-x^2 + 6x + 1 = 0$; $x_2 = 3 - \sqrt{10} \approx -0{,}16 \notin D_g$; $x_3 = 3 + \sqrt{10} \approx 6{,}16 \in D_g$	5
2.2	Graph G_e Gewinn für $3 < x < 6{,}16$; Verlust für $0 \le x < 3$ sowie für $6{,}16 < x \le 7$	4
2.3	$g'(x) = -3x^2 + 18x - 17$; $g''(x) = -6x + 18$; $D_{g'} = D_{g''} =]0; 7[$; $g'(x) = 0 \Rightarrow$ $x_1 = \frac{18 + 2\sqrt{30}}{6} \approx 4{,}83 \in D_g$; $g''(x_1) < 0$; relatives Maximum bei x_1. $x_2 = \frac{18 - 2\sqrt{30}}{6} \approx 1{,}17 \in D_g$; $g''(x_2) > 0$; relatives Minimum bei x_2. Da g differenzierbar ist, gibt es noch ein Randmaximum bei $x_3 = 0$ mit $g(0) = -3$ sowie ein Randminimum bei $x_4 = 7$ mit $g(7) = -24$. $g(x_1) = g(x_M) \approx 12{,}17$. $\Rightarrow$ Absolutes Maximum für $x_M \approx 4{,}83$.	8

3.1	$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 3} f(x) = 30$; $\quad f(3) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 3} f(x) = 9a + 3b + 66$ $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 18x + 27 & \text{für } 0 < x < 3 \\ 2ax + b & \text{für } 3 < x < 7 \end{cases}$ $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 3} f'(x) = 0$; $\quad \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 3} f'(x) = 6a + b$ (1) $9a + 3b + 66 = 30$ (2) $6a + b = 0$; $\quad b = -6a$ in (1): $\quad 9a - 18a = -36$; $a = 4$; $b = -24$ Die Stetigkeit bedeutet, dass eine kleine Änderung der Produktmenge im Bereich von $x_0 = 3$ nicht zu einer sprunghaften Änderung der Kosten führt.	10

Aufg.	A II	BE
3.2	Wertetabelle, Graph G_f $A = \int_3^7 (f(x) - k(x))\,dx = \int_3^7 (4x^2 - 24x + 66 - x^3 + 9x^2 - 27x - 3)dx = 21\frac{1}{3}$	10
		60

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen

$$f_k : x \mapsto f_k(x); \quad D_{f_k} = \mathbb{R}$$

$$f_k(x) = -\frac{1}{4}(x^3 + k\,x^2 - 2k\,x - 8) \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}.$$

Der Graph einer solchen Funktion f_k in einem kartesischen Koordinatensystem heißt G_{f_k}.

1.1.1 Zeigen Sie, dass $x_1 = 2$ für alle Werte von k eine Nullstelle von f_k ist und zerlegen Sie damit den Term $f_k(x)$ in ein Produkt mit genau einem Linearfaktor. (5 BE)

(Mögliches Teilergebnis: $f_k(x) = -\frac{1}{4}(x^2 + kx + 2x + 4)(x - 2)$)

1.1.2 Untersuchen Sie, für welche Werte von k die Funktion f_k neben $x_1 = 2$ noch mindestens eine weitere Nullstelle besitzt. Achten Sie dabei auch auf die Sonderfälle k = – 6 und k = 2. (9 BE)

1.1.3 Berechnen Sie nun k so, dass die Funktion f_k bei $x_2 = -2$ eine doppelte Nullstelle hat. (3 BE)

1.2.0 Für die Aufgaben dieser Gruppe gilt k = 2.

1.2.1 Bestimmen Sie Art und Koordinaten sämtlicher relativer Extrempunkte sowie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen G_{f_2}. (9 BE)

1.2.2 Zeichnen Sie den Graphen G_{f_2} für $-4 \le x \le 2{,}5$. Verwenden Sie dazu die bisherigen Ergebnisse und berechnen Sie zusätzlich die Funktionswerte $f_2(-4)$, $f_2(0)$ und $f_2(2{,}5)$.
Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm. (5 BE)

1.2.3 Der Graph G_{f_2} besitzt zwei Tangenten t_1 und t_2, die parallel zur Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten verlaufen. Die Berühr-punkte dieser Tangenten mit dem Graphen G_{f_2} heißen B_1 und B_2. Der weiter rechts liegende Berührpunkt wird mit B_1 bezeichnet.
Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte B_1 und B_2 sowie die Gleichung der Tangente t_1. (Teilergebnis: t_1 hat die Funktionsgleichung y = x + 2) (7 BE)

Fortsetzung s. nächste Seite

1.2.4 Die Tangente t_1 schließt mit dem Graphen G_{f_2} zwischen den Stellen $x_2 = -2$ und $x_3 = 0$ ein endliches Flächenstück ein. (Zwischen diesen beiden Stellen gibt es keinen Schnittpunkt von t_1 und G_{f_2}.)
Zeichnen Sie die Gerade t_1 in das vorhandene Koordinatensystem ein, schraffieren Sie das oben beschriebene Flächenstück und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. (6 BE)

1.3 Gegeben ist nun die reelle Funktion

$$g : x \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{4}(x^3 + 2x^2 - 4x - 8) & \text{für } x \le 0 \\ ax + b & \text{für } x > 0 \end{cases}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie a und b so, dass die Funktion g an der Stelle $x_3 = 0$ stetig und differenzierbar ist. (7 BE)

2.0 Ein Kino hat bei einem Eintrittspreis von DM 10,-- durchschnittlich 200 Besucher. Man schätzt, dass bei einer Erhöhung des Eintrittspreises um DM 1,-- die ursprüngliche Besucherzahl um durchschnittlich 10 abnehmen wird, bei einer Erhöhung um DM 2,-- um 20, bei einer Erhöhung um DM 3,-- um 30 usw.. (Zur Vereinfachung werden für die Berechnungen sämtliche Einheiten weggelassen.)

2.1 Die zu erwartenden Einnahmen in Abhängigkeit von der Preiserhöhung x lassen sich mit Hilfe einer differenzierbaren Funktion E beschreiben. Ermitteln Sie den Funktionsterm E(x). Geben Sie auch eine sinnvolle Definitionsmenge D_E an, wenn man als Grundmenge $\mathbb{R}$ wählt.
(Teilergebnis: $E(x) = 2000 + 100x - 10x^2$) (4 BE)

2.2 Berechnen Sie den Eintrittspreis so, dass die Einnahmen den absolut größten Wert annehmen. (5 BE)

1.0 In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Ebene $F: x_2 + 7x_3 + 5 = 0$ sowie die Punkte A(2 | 3 | –2), B(3 | 7 | –5) und S(1 | 5 | –3) gegeben.

1.1 Begründen Sie, dass die Punkte A, B und S eine Ebene festlegen. Bestimmen Sie je eine Gleichung von E in Parameterform und in parameterfreier Darstellung.

$[$Mögliches Teilergebnis für $E: x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2 = 0]$ (6BE)

1.2 Berechnen Sie die Koordinaten des Endpunktes C der Strecke [BC], wenn S auf der Strecke [BC] liegt und diese im Verhältnis $\overline{BS} : \overline{SC} = 1 : 3$ teilt. (4BE)

1.3 Geben Sie die besondere Lage der Ebene F im Koordinatensystem an. Ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s der Ebenen E und F. (5BE)

1.4 Weiter sind die Ebenen $H_m:\ 2x_1 - x_2 + (m - 27)x_3 - 29 = 0$ mit $m \in \mathbb{R}$ gege-ben. Ermitteln Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus die Anzahl der gemeinsamen Punkte aller drei Ebenen E, F und H_m in Abhängigkeit von m. (5BE)

2.0 Gegeben ist nun die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}$ mit a, b, c $\in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

2.1 Berechnen Sie $A^2 = A \cdot A$ und zeigen Sie, dass gilt: $A^3 = A^2 \cdot A = (abc) \cdot E$, wobei E die Einheitsmatrix ist. Folgern Sie daraus, was sich für A^7 ergibt. (6BE)

2.2 Nun werde die Matrix A als Inputmatrix interpretiert, die die Verflechtung von drei Sektoren I, II und III beschreibt. Erläutern Sie, wie sich die besondere Gestalt von A in der Verflechtung der Sektoren äußert, und ermitteln Sie, für welche Werte von a , b und c jede beliebige Nachfrage am Markt befriedigt werden kann. (6BE)

2.3 Nun wird das lineare Gleichungssystem $(A+A^2)\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ betrachtet. Untersu-chen Sie durch eine Rangbetrachtung, welche Lösungsmenge das Gleichungs-system in Abhängigkeit von a, b und c besitzt. Geben Sie die Lösungsmenge für $a=-1$, $b=\frac{1}{2}$ und $c=2$ an. (8BE)

1.0 Gegeben sind im 3^3 die Vektoren $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ und $\vec{w}=\begin{pmatrix}3\\m\\1\end{pmatrix}$ mit $m\in 3$ sowie die Punkte A(1 | 4 | –2) und B(2 | 0 | 5).

1.1 Ermitteln Sie, für welchen m-Wert die drei Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ keine Basis des Vektorraumes bilden. (4BE)

1.2 Im Folgenden sei $m=2$. Stellen Sie eine parameterfreie Gleichung der Ebene $E:\vec{x}=\vec{OA}+r\cdot\vec{v}+s\cdot\vec{w}$ auf, und berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes von E mit der Geraden $g:\vec{x}=\vec{OB}+k\cdot\vec{u}$ (r, s, $k\in 3$).

(Mögliches Teilergebnis E: $3x_1-5x_2+x_3+19=0$) (8BE)

1.3 Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden der Ebene E und der Ebene F: $-2x_1+x_2+4x_3-8=0$ (5BE)

2.0 Gegeben sind die Punkte P(2 | 2 | 1), Q(8 | 4 | 1) und R(3 | 9 | 1), die nicht auf einer Geraden liegen.

2.1 Ermitteln Sie die Koordinaten aller drei Punkte D_1, D_2 und D_3, so dass die vier Punkte P, Q, R und D_i mit $1\le i\le 3$ je ein Parallelogramm bilden. (6BE)

2.2 Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes F, für den gilt: $\vec{FQ}=2\cdot\vec{PF}$. Beschreiben Sie die Lage von F bezüglich P und Q genau. (5BE)

2.3 Untersuchen Sie, wie viele Lösungen das lineare Gleichungssystem $k_1\cdot\vec{PQ}+k_2\cdot\vec{QR}+k_3\cdot\vec{PR}=\vec{0}$ mit $k_1,k_2,k_3\in IR$ besitzt, und folgern Sie daraus eine Aussage für die 3 Vektoren $\vec{PQ}$, $\vec{QR}$ und $\vec{PR}$. (4BE)

3.0 Drei Abteilungen I, II und III einer Firma sind nach dem Leontief-Modell miteinander verflochten. Gegeben ist die zugehörige Inputmatrix $A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0 & 0{,}25 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}25 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

3.1 Welche Nachfrage kann befriedigt werden, wenn für den nächsten Planungszeitraum der Produktionsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 75 \\ 100 \\ 80 \end{pmatrix}$ gegeben ist? (3BE)

3.2 Eine Änderung des Produktionsverfahrens bewirkt in Abteilung III die Halbierung des Eigenverbrauchs und eine Veränderung der Liefermenge an Abteilung II. Die Produktionsmengen in Abteilung I werden erhöht, die der Abteilungen II und III bleiben bei 100 ME bzw. 80 ME, der erwartete Nachfragevektor ist $\vec{y} = \begin{pmatrix} 52 \\ b \\ 34 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie das veränderte Element a_{32} der Inputmatrix, die Komponente b des Nachfragevektors und die in Abteilung I produzierten Mengeneinheiten. (5BE)

1 Im Vektorraum der (2,2)-Matrizen bezüglich der üblichen Verknüpfungen „+“ und „•“ ist die Matrix $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ gegeben.

1.1 Berechnen Sie die Matrizen $A^2 = A \cdot A$ und $A^3 = A^2 \cdot A$. (4BE)

1.2 Zeigen Sie, dass die zwei Matrizen A und A^2 linear unabhängig sind, die drei Matrizen A, A^2 und A^3 jedoch linear abhängig sind. Stellen Sie die Matrix A^3 als Linearkombination der Matrizen A und A^2 dar. (7BE)

2 Im geometrischen Punktraum des $\mathbb{R}^3$ sind die Ebene $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, sowie in Abhängigkeit von $s \in \mathbb{R}$ die Ebenen

$E_2: 4x_2 + 3x_3 - s = 0$ und $E_3: x_1 + 2x_2 + s^2 x_3 - 5 = 0$ gegeben.

2.1 Zeigen Sie, dass die Gerade g mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in E_1 enthalten ist. (5BE)

2.2 Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $s \in \mathbb{R}$ die Koordinaten des Schnittpunktes von E_2 mit der Geraden g. (3BE)

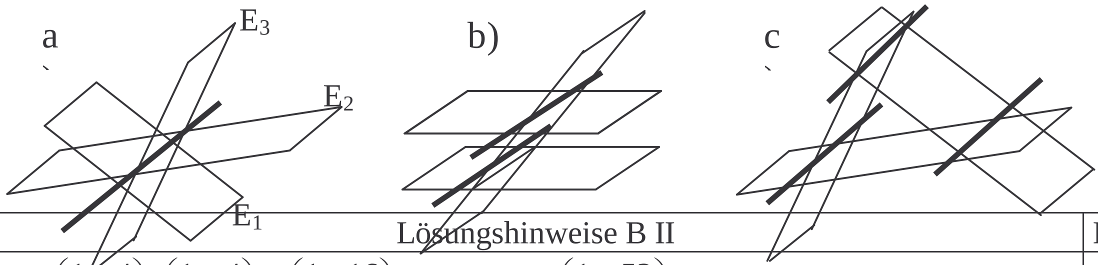
2.3 Ermitteln Sie eine Gleichung von E_1 in Koordinatenform. (4BE)

(Mögliches Ergebnis für $E_1: x_1 - 2x_2 + x_3 - 3 = 0$)

2.4 Stellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix für das Gleichungssystem zur Untersuchung der gemeinsamen Punkte der Ebenen E_1, E_2 und E_3 auf. Untersuchen Sie durch eine Rangbetrachtung, für welche Werte von s das lineare Gleichungssystem genau eine, keine oder unendlich viele Lösungen besitzt. (7BE)

2.5 Geben Sie die Lösungen des Gleichungssystems aus Aufgabe 2.4 für s = –1 sowie für s = 2 in vektorieller Form an. (5BE)

2.6 Setzen Sie nun s = –2. Begründen Sie, welche der drei skizzierten Lagen in diesem Fall die drei Ebenen zueinander einnehmen. (5BE)



Nr.	Lösungshinweise B II	BE
1.1	$A^2=\begin{pmatrix}1&4\\0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&4\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&16\\0&9\end{pmatrix}$; $A^3=A^{2}\cdot A=\begin{pmatrix}1&52\\0&27\end{pmatrix}$	4
1.2	$kA+lA^2+mA^3=0_{2,2}$ führt zu $\begin{pmatrix}1&1&1&0\\4&16&52&0\\0&0&0&0\\3&9&27&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&12&48&0\\0&6&24&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&4&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ Da die ersten beiden Spalten offensichtlich keine Vielfachen voneinander sind, sind die Matrizen A und A^2 linear unabhängig. Rang M = 2<3, also sind A, A^2 und A^3 linear abhängig; z.B. m=1 ergibt l=-4, k=3, also $A^3= 4A^2-3A$.	7
2.1	$g\cap E_1$: $\begin{pmatrix}4&0&-2&-7\\1&1&-1&-2\\-2&2&0&3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}4&0&-2&-7\\0&4&-2&-1\\0&8&-4&-2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}4&0&-2&-7\\0&4&-2&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ RangA = RangA$_{erw}$ = 2 LGS hat ∞ viele Lsgen. g ist in E_1 enthalten.	5
2.2	$g\cap E_2$: $4r+3\cdot3-s=0$; $r=\frac{s-9}{4}$; $S(\frac{s-9}{2}\mid\frac{s-9}{4}\mid 3)$.	3
2.3	$\begin{pmatrix}4&0&x_1-7\\1&1&x_2-2\\-2&2&x_3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&x_2-2\\0&-4&x_1-4x_2+1\\0&4&2x_2+x_3-4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&x_2-2\\0&-4&x_1-4x_2+1\\0&0&x_1-2x_2+x_3-3\end{pmatrix}$ Also: E_1: $x_1-2x_2+x_3-3=0$.	4
2.4	$\begin{pmatrix}1&-2&1&3\\0&4&3&s\\1&2&s^2&5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-2&1&3\\0&4&3&s\\0&4&s^2-1&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-2&1&3\\0&4&3&s\\0&0&s^2-4&2-s\end{pmatrix}$ RangA=3 ⇔ $s\in$ IR\{-2;2}. Das LGS hat genau eine Lösung. s=2: RangA=2=RangA$_{erw}$<3. Das LGS hat unendlich viele Lösungen. s=-2: RangA=2<RangA$_{erw}$=3. Das LGS hat keine Lösung.	7
2.5	<u>s=-1</u>: $\begin{pmatrix}1&-2&1&3\\0&4&3&-1\\0&0&-3&3\end{pmatrix}$; x_3=-1; x_2=0,5; x_1=5. <u>s=2:</u> $\begin{pmatrix}1&-2&1&3\\0&4&3&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$; wählt man x_3=k, so erhält man: $x_2=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}k$; $x_1=4-\frac{5}{2}k$, also $\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\0{,}5\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-2{,}5\\-0{,}75\\1\end{pmatrix}$, k∈ IR.	5
2.6	Fall a) scheidet aus, denn das zu s=-2 gehörige LGS hat nach 2.4 keine Lsg.	

	Fall b): $E_1 \cap E_2 : \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ LGS hat Lösungen, also E_1 nicht parallel E_2. $E_1 \cap E_3 : \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ LGS hat Lsgen, also E_1 nicht parallel E_3; $E_3 \cap E_2 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ LGS hat Lsgen, also E_3 nicht parallel E_2. Fall b) scheidet also aus, deshalb kann nur Fall c) richtig sein.	5
	$\Sigma =$	40

1.0 Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & -k \\ 2 & k & -26 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$ sowie $k \in \mathbb{R}$.

1.1 Untersuchen Sie durch eine Rangbetrachtung, für welche $k \in \mathbb{R}$ das Gleichungssystem keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen besitzt, und geben Sie für k = 8 die Lösungsmenge an. (10BE)

1.2 Interpretieren Sie die Spalten der Matrix A als Vektoren des $\mathbb{R}^3$. Welche Aussage ergibt sich aus Aufgabe 1.1 über die lineare Unabhängigkeit dieser Vektoren? (3BE)

2.0 Nun wird die Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ betrachtet.

2.1 Ermitteln Sie die Menge aller (2,2)-Matrizen D, für die gilt: $B \cdot D = D \cdot B$. Geben Sie sodann ein Beispiel für eine Matrix C an, für die die Matrizenmultiplikation $B \cdot C$ <u>nicht</u> kommutativ ist. (7BE)

2.2 Bestimmen Sie die reellen Zahlen α und β, für die gilt: $B^3 = \alpha \cdot B + \beta \cdot B^2$. Hierbei ist $B^2 = B \cdot B$. (4BE)

2.3 Nun sei n eine beliebige, natürliche Zahl. Folgern Sie aus dem Vergleich von B^2 und B^3 eine Beziehung für die Matrix B^n. Überprüfen Sie Ihre Vermutung durch Berechnen von $B^{n+1} = B \cdot B^n$. (3BE)

3.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte Q(0|–1|4) und R(0 | 5 | –8) gegeben.

3.1 Begründen Sie, welche besondere Lage die Gerade QR im Koordinaten-system besitzt, und berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes von QR mit der x_1x_3-Ebene. (4BE)

3.2 Untersuchen Sie, ob es eine Ebene E gibt, die die Gerade QR und die Gerade mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ enthält, und stellen Sie ggf. eine parameterfreie Gleichung von E auf. (6BE)

3.3 Ein Objekt bewegt sich ohne Richtungswechsel mit konstanter Geschwindigkeit auf der Geraden QR. Es startet in Q und erreicht 10 Sekunden später R. Berechnen Sie, in welchem Punkt es sich 45 Sekunden nach dem Start befindet. (3BE)

1 Im $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte P(1 | -5 | -2) und Q(2 | -1 | -3) sowie die Geraden h_a:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ -4-a \end{pmatrix}$$ mit $k \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ gegeben.

1.1 Durch P und Q ist eine Gerade g festgelegt. Untersuchen Sie, ob eine Gerade h_a parallel zu g verläuft. (4BE)

1.2 Bestimmen Sie denjenigen Wert a, für den die zugehörige Gerade h_a die Gerade g schneidet. Berechnen Sie auch die Koordinaten des Schnittpunktes S. (7BE)
(Teilergebnis: S(– 9 | – 45 | 8))

1.3 Berechnen Sie das Teilverhältnis λ aus der Gleichung $\overrightarrow{PS} = \lambda \cdot \overrightarrow{SQ}$. Erläutern Sie damit die Lage des Punktes S bezüglich der Punkte P und Q.(4BE)

1.4 Die Ebene E enthält die Geraden g und h_{-3} (also a = –3). Ermitteln Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. (5BE)

(Ergebnis: $8x_1 - x_2 + 4x_3 - 5 = 0$)

1.5 Geben Sie die Koordinaten je eines Punktes auf der x_1x_2-Koordinatenebene bzw. auf der x_1x_3-Koordinatenebene an, der gleichzeitig in E aber nicht auf einer Koordinatenachse liegt. (4BE)

2 Drei Firmen A, B und C sind nach dem Leontiefmodell miteinander verflochten. Die gegenseitig und für den Markt erbrachten Leistungen werden in Verrechnungseinheiten in folgender Tabelle zusammengestellt:

	A	B	C	Markt
A	0	60	8	332
B	100	0	54	146
C	80	48	0	72

Stellen Sie die Inputmatrix auf. Bestimmen Sie denjenigen Produktions-vektor $\vec{x}$, der zum Nachfragevektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} 304 \\ 192 \\ 256 \end{pmatrix}$ gehört. (8BE)

3 Im Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2 sind die Elemente $p_1 = x^2 + x - 2$, $p_2 = -x^2 + 4x$ und $p_3 = 3x + 5$ gegeben.

3.1 Begründen Sie, dass $\{p_1, p_2, p_3\}$ eine Basis des Vektorraums bildet. (4BE)

3.2 Berechnen Sie die Koordinaten des Elements $p_4 = 9x^2 - 8x - 5$ bezüglich dieser Basis. (4BE)

Nr.	Lösungshinweise B I	BE
1.1	g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$; $g \parallel h_a \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ -4-a \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow m = 0{,}5$ $\Leftrightarrow m = \frac{1}{3}$ Widerspruch! keine Parallele zu g	4
1.2	$\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ -4-a \end{pmatrix}$ führt zu $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 4 & -12 & -4 \\ -1 & 4+a & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & 12 \\ 0 & 2+a & 3 \end{pmatrix}$ $\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -36-12a \end{pmatrix}$; eine Lsg. für a=-3 ; k=-3 eingesetzt: S(-9| -45|8).	7
1.3	$\begin{pmatrix} -10 \\ -40 \\ 10 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 44 \\ -11 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda = \frac{-10}{11}$.  S liegt außerhalb von $[PQ]$ auf der Seite von P.	4
1.4	E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}$; Umwandlung in Koordinatenform durch Gauß-Alg.: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1-1 \\ 4 & 12 & x_2+5 \\ -1 & -1 & x_3+2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1-1 \\ 0 & 4 & -4x_1+x_2+9 \\ 0 & 1 & x_1+x_3+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1-1 \\ 0 & 4 & -4x_1+x_2+9 \\ 0 & 0 & 8x_1-x_2+4x_3-5 \end{pmatrix}$. Damit erhält man E: $8x_1 - x_2 + 4x_3 - 5 = 0$.	5
1.5	$x_3=0$ in E ergibt $8x_1 - x_2 - 5 = 0$; also z.B. $T_1(1\|3\|0)$. Analog: $T_2(1\|0\|-\frac{3}{4})$.	4
2	$\vec{x} = \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \\ 200 \end{pmatrix}$; $A=(a_{ij})=\left(\frac{x_{ij}}{x_j}\right)$; $A = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}2 & 0{,}04 \\ 0{,}25 & 0 & 0{,}27 \\ 0{,}2 & 0{,}16 & 0 \end{pmatrix}$; Ansatz: $\vec{y} = (E - A) \cdot \vec{x}$ $\begin{pmatrix} 1 & -0{,}2 & -0{,}04 & 304 \\ -0{,}25 & 1 & -0{,}27 & 192 \\ -0{,}2 & -0{,}16 & 1 & 256 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -0{,}2 & -0{,}04 & 304 \\ 0 & 0{,}95 & -0{,}28 & 268 \\ 0 & -0{,}2 & 0{,}992 & 316{,}8 \end{pmatrix} \to$ $\begin{pmatrix} 1 & -0{,}2 & -0{,}04 & 304 \\ 0 & 0{,}95 & -0{,}28 & 268 \\ 0 & 0 & 0{,}8864 & 354{,}56 \end{pmatrix}$, also $x_3=400$, $x_2=400$, $x_1=400$.	8
3.1	$k_1p_1+k_2p_2+k_3p_3=0$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 31 \end{pmatrix}$; Rang(A) = 3 Vekt. linear unabhängig Da die Dimension des VR 3 ist, bilden die Vektoren eine Basis.	4
3.2	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 9 \\ 1 & 4 & 3 & -8 \\ -2 & 0 & 5 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 9 \\ 0 & 5 & 3 & -17 \\ 0 & -2 & 5 & 13 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 9 \\ 0 & 5 & 3 & -17 \\ 0 & 0 & 31 & 31 \end{pmatrix}$ $x_1 = 5$, $x_2 = -4$, $x_3 = 1$ bzgl. B.	4
	$\Sigma =$	40

1.0 In einem kartesischen Koordinatensystem ist der Punkt $A_m(3-m \mid m-1 \mid m-2)$ in Abhängigkeit von $m \in \mathbb{R}$ sowie die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ gegeben.

1.1 Untersuchen Sie, für welche $m \in \mathbb{R}$ durch die Gerade g und den Punkt A_m eine Ebene E festgelegt ist. (3BE)

1.2 Stellen Sie für m = 3 je eine Gleichung der Ebene E in Parameterform und parameterfreier Darstellung auf. (5BE)
(Mögliches Ergebnis: $2x_1 - x_2 + 3x_3 - 1 = 0$)

1.3 Nun sind die Punkte P(3| 4 | –2) und $Q_a(1-2a \mid a-2 \mid a+2)$ mit $a \in \mathbb{R}$ gegeben. Bestimmen Sie a so, dass die Ebene E die Strecke $[PQ_a]$ halbiert. (5BE)

2.0 Gegeben ist die Matrix $M_b = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}$ und der Vektor $\vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $b \in \mathbb{R}$.

2.1 Bestimmen Sie k und b so, dass die Gleichung $M_b \cdot \vec{e} = k \cdot \vec{e}$ mit $k \in \mathbb{R}$ erfüllt ist. (4BE)

2.2 Untersuchen Sie anhand einer Rangbetrachtung, für welche Zahlen b das Gleichungssystem $M_b \cdot \vec{x} = \vec{e}$ genau eine bzw. keine Lösung besitzt. (5BE)

3.0 Die drei Abteilungen F, G und H eines Unternehmens sind nach dem Leon-tief-Modell miteinander verbunden (Angaben in Mengeneinheiten ME):

	F	G	H	Markt
F	20	3	2	15
G	8	9	6	7
H	4	3	0	3

3.1 Bestimmen Sie die Inputmatrix A. (3BE)

3.2 Es wird eine Produktionserhöhung in Abteilung F um 20 und in Abteilung G um 30 Einheiten bei gleichbleibender Produktion in H vorgeschlagen. Beurteilen Sie anhand des neuen Marktvektors, ob dies möglich ist. (3BE)

3.3 Berechnen Sie zum Marktvektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ den Produktionsvektor. (4BE)

3.4 Nun soll Abteilung F die Produktion auf 60 ME erhöhen und die Abteilun-gen F und G sollen jeweils mindestens 20 ME an den Markt abgeben. Stellen Sie die drei sich ergebenden Bedingungen in einem x_2x_3-Koordinatensystem ($0 \le x_2 \le 80$) dar, und kennzeichnen Sie den Bereich für die zugehörigen Produktionszahlen in den Abteilungen G und H. (8BE)

1.0 Eine Bergsteigergruppe will am Wochenende eine Tour unternehmen. Der Wetterdienst sagt für Freitag eine Regenwahrscheinlichkeit von 0,14, für Samstag von 0,05 und für Sonntag von 0,65 voraus.

1.1 Stellen Sie mit Hilfe eines Baumdiagramms die Wetterkonstellationen für die drei Tage geeignet dar und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse. Runden Sie diese Wahrscheinlichkeiten auf drei Stellen nach dem Komma. (5 BE)

1.2 Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Tage mit Regen unter den drei Tagen an. Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X in Tabellenform dar. (2 BE)

1.3.0 Die Gruppe will die Tour starten, wenn die Wahrscheinlichkeit, an mindestens zwei aufeinander folgenden Tagen keinen Regen zu haben, mindestens 0,9 beträgt.

1.3.1 Weisen Sie rechnerisch nach, dass bei den vorliegenden Wetterprognosen die Tour nicht unternommen werden kann. (3 BE)

1.3.2 BerechnenSie, wie groß die Regenwahrscheinlichkeit für Sonntag höchs-tens sein dürfte, damit die Tour gestartet werden könnte. Die Regenwahrscheinlichkeiten für die beiden anderen Tage seien dabei unverändert.(4 BE)

2.0 Im kommenden Winter will die Bergsteigergruppe 20 Tage in den Rocky Mountains verbringen. Zu dieser Zeit schneit es dort erfahrungsgemäß an durchschnittlich 12 von 30 Tagen.

2.1 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, mindestens die erste Woche ohne Schneefall zu erleben. (3 BE)

2.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mindestens 7 Tage ohne Schneefall zu verbringen. (4 BE)

Fortsetzung s. nächste Seite

2.3.0 Bei ihrem Aufenthalt hat die Gruppe tatsächlich nur zwei Tage mit Schneefall erlebt. Damit stellt sich die Frage, ob die wenigen Tage mit Schneefall womöglich auf eine Wetteranomalie zurückzuführen sind. Deshalb wird der 20-tägige Aufenthalt als Rahmen für einen Signifikanztest herangezogen. Man ist bereit, die Nullhypothese „keine Wetteranomalie", also $p_0 = 0{,}4$, beim Auftreten von mehr als zwei Schneefalltagen anzunehmen.

2.3.1 Beschreiben Sie mit eigenen Worten, worin bei dieser Thematik der Fehler 1. Art besteht. (2 BE)

2.3.2 Berechnen Sie nun die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art mit den obigen Angaben. Geben Sie dazu auch die Testgröße, die Art des Tests, die Nullhypothese und die Gegenhypothese an. Begründen Sie vor dem Hintergrund des Ergebnisses dieser Rechnung, ob die zwei Tage mit Schneefall noch als „normal" betrachtet werden können. (6 BE)

2.3.3 Bestimmen Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese, wenn ein Signifikanzniveau von 5 % vorgegeben wird. (2 BE)

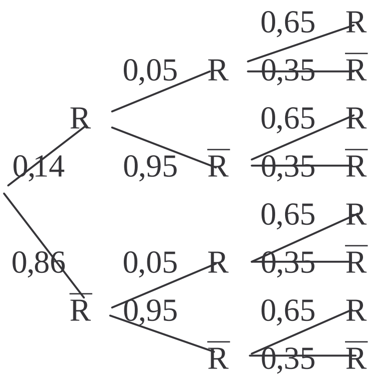
3.0 Eine Firma möchte wissen, wie stark Bergsteiger in den vom Hersteller neu entwickelten Pullovern und Anoraks schwitzen und stattet 68 Testpersonen jeweils mit diesen Kleidungsstücken aus. 10 Testpersonen gaben an, am Gipfel zwar einen nassen Anorak, aber einen trockenen Pulli gehabt zu haben. Insgesamt waren bei 40 Personen die Pullis nass, aber nur bei 5 waren beide Kleidungsstücke feucht.

Interpretieren Sie die daraus ermittelten relativen Häufigkeiten im Folgenden als Wahrscheinlichkeiten.

3.1 Bestimmen Sie mit Hilfe einer Vierfeldertafel die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Bergsteiger mit diesen Kleidern trocken auf dem Gipfel steht. (4 BE)

3.2 Prüfen Sie durch Rechnung, ob die Ereignisse E_1: „Der Pulli ist trocken" und E_2: „Der Anorak ist trocken" stochastisch unabhängig sind. (3 BE)

3.3 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem beliebigen Bergsteiger mindestens eines der beiden Kleidungsstücke trocken bleibt. (2 BE)

1.1 

ω_i	RRR	$RR\bar{R}$	$R\bar{R}R$	$R\bar{R}\bar{R}$	$\bar{R}RR$	$\bar{R}R\bar{R}$	$\bar{R}\bar{R}R$	$\bar{R}\bar{R}\bar{R}$
$P(\{\omega_i\})$	0,005	0,002	0,086	0,047	0,028	0,015	0,531	0,286

(5BE)

1.2

x	0	1	2	3
P(X=x)	0,286	0,593	0,116	0,005

(2 BE)

1.3.1 $P\left(\left\{R\bar{R}\bar{R}, \bar{R}\bar{R}R, \bar{R}\bar{R}\bar{R}\right\}\right) = 0{,}047 + 0{,}531 + 0{,}286 = 0{,}864 < 0{,}9$ (3BE)

1.3.2 Regenwahrscheinlichkeit für Sonntag: x

$P(\{R\bar{R}\bar{R}, \bar{R}\bar{R}R, \bar{R}\bar{R}\bar{R}\}) = 0{,}14 \cdot 0{,}95 \cdot (1 - x) + 0{,}86 \cdot 0{,}95 \cdot 1$

$= 0{,}133 - 0{,}133x + 0{,}817$

$= 0{,}95 - 0{,}133x$

$0{,}95 - 0{,}133x \geq 0{,}9 \Rightarrow x \leq 0{,}376$ (4BE)

Die Regenwahrscheinlichkeit für Sonntag dürfte höchstens 0,376 betragen.

2.1 P(Schnee) = 0,4

$P(E) = (0{,}6)^7 \cdot 1 = 0{,}028$ (3BE)

2.2 P(E) = P(Tage ohne Schnee ≥ 7) = P(Tage mit Schnee ≤ 13)

Bernoulli: p = 0,4; n = 20; k ≤ 13

$P(E) = \sum_{i=0}^{13} B(20;0{,}4;i) = 0{,}99353 \approx 0{,}99$ (4BE)

2.3.1 Der Fehler erster Art besteht darin, dass man die Nullhypothese ablehnt, obwohl sie richtig ist. Man nimmt also an, dass eine Wetteranomalie vorliegt, obwohl dies nicht der Fall ist. (2BE)

2.3.2 Testgröße T: Anzahl der Tage mit Schneefall

Art: Einseitiger (linksseitiger) Test

H_0: $p_0 = 0{,}4$; H_1: $p < 0{,}4$

Annahmebereich von H_0: {3; 4; ...; 20}

Ablehnungsbereich von H_0: {0; 1; 2 }

$\alpha' = P(T \leq 2) = 0{,}00361$. (6BE)

Da α' verschwindend klein ist, kann man die nur zwei Tage mit Schnee wohl nicht mehr als „normal“ bezeichnen.

2.3.3 P(T □ k) □ 0,05

Aus Tabelle: k □ 3

Ablehnungsbereich der Nullhypothese: {0; 1; 2; 3} (2BE)

3.1 Vierfeldertafel

	nasser Anorak	trockener Anorak	
nasser Pulli	5	35	40
trockener Pulli	10	18	28
	15	53	68

$P(E) = \frac{18}{68} = \frac{9}{34} \approx 0{,}265$ (4BE)

3.2 $P(E_1) = \frac{28}{68} = \frac{7}{17}$

$P(E_2) = \frac{53}{68}$

$P(E_1 \cap E_2) = P(E) = \frac{9}{34} \neq \frac{7}{17} \cdot \frac{53}{68}$

E_1 und E_2 sind stochastisch abhängig. (3BE)

3.3 $P(E_3) = 1 - \frac{5}{68} = \frac{63}{68} \approx 0{,}926$ (2BE)

(40BE)

1.0 Eine Urne enthält 8 Kugeln, von denen je eine mit der Ziffer **0** bzw. **3** sowie je drei mit der Ziffer **1** bzw. **2** beschriftet sind.

1.1.0 Spiel I besteht darin, aus der Urne zufällig 10 einzelne Kugeln **mit** Zurücklegen zu ziehen. Folgende Ereignisse werden betrachtet:

E_1: „Es wird genau zweimal oder genau dreimal die Ziffer **2** gezogen."

E_2: „Es wird mindestens dreimal die Ziffer **2** gezogen."

1.1.1 Begründen Sie rechnerisch, ob es für einen Spieler günstiger ist, auf das Ereignis E_1 oder auf das Gegenereignis $\overline{E_1}$ zu wetten. (4 BE)

1.1.2 Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck, drücken Sie E_3 in umgangssprachlicher Form aus und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(E_3)$:

$E_3 = \overline{\overline{E_1} \cup E_2}$. (3 BE)

1.2.0 Spiel II besteht darin, aus der Urne zufällig 50 Kugeln **<u>mit</u>** Zurücklegen zu ziehen.

1.2.1 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei die Ziffer **0** mehr als 4 mal aber höchstens 12 mal gezogen wird. (3 BE)

1.2.2 Ermitteln Sie, für welche Zahl k die Wahrscheinlichkeit, dass bei 50 Zügen mit Zurücklegen genau k mal die Ziffer **0** gezogen wird, am größten ist. Bestimmen Sie mit diesem Wert k die Wahrscheinlichkeit $P(|X - k| \leq 1)$. (5 BE)

1.3.0 Bei Spiel III werden aus der in 1.0 beschriebenen Urne nacheinander **drei** Kugeln **<u>ohne</u>** Zurücklegen gezogen.

1.3.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man nie sowie diejenige dafür, dass man genau dreimal die Ziffer **1** zieht. (3 BE)

1.3.2 Geben Sie das Ereignis A: „Es wird genau zweimal die Ziffer **1** gezogen“ in der aufzählenden Mengenschreibweise an und bestimmen Sie P(A). (4 BE)

1.3.3 Die Ziffern werden in der Reihenfolge der Ziehung von links nach rechts nebeneinander geschrieben und ergeben auf diese Weise eine Zahl. Ermitteln Sie, wie viele Möglichkeiten es gibt, dass die so gebildete Zahl zwischen 100 und 200 liegt. (3 BE)

2.0 Eine Firma, die maschinell Kunststoffziffern (**0**; ... ; **9**) herstellt und in Kisten ab-füllt, behauptet, dass in einer großen Lieferung alle Ziffern gleich häufig auftreten. Nach einer ersten Durchsicht vermutet der Käufer einer solchen Lieferung, dass die Ziffer **1** mit größerer Häufigkeit enthalten ist (Gegenhypothese).
Man entnimmt für eine Stichprobe nacheinander mit Zurücklegen zufällig 200 Ziffern der Lieferung. Enthält die Stichprobe mehr als 25 mal die Ziffer **1**, dann wird die Lieferung abgelehnt.

2.1 Geben Sie für obigen Test die Testgröße T und die Nullhypothese H_0 an und berechnen Sie Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Käufer die Lieferung ablehnt, obwohl die Behauptung des

Lieferanten stimmt. (5 BE)

2.2 Erklären Sie, worin in diesem Fall der Fehler 2. Art besteht. (2 BE)

2.3 Ermitteln Sie für den in 2.0 beschriebenen Test die Entscheidungsregel so, dass das Signifikanzniveau 1% beträgt. (4 BE)

3 Für zwei beliebige Ereignisse E_1 und E_2 desselben Ergebnisraums Ω mit $P(E_1)$ □ 0 und $P(E_2)$ □ 0 gelte: $P(E_1 \cap E_2) = 0$. Was lässt sich über die stochastische (Un-) Abhängigkeit dieser Ereignisse aussagen? Genaue Begründung! Geben Sie auch ein selbst gewähltes Beispiel an! (4 BE)

1.0 Eine Keksfabrik stellt Kekse in den beiden Füllungsvarianten Vanillecreme (V-Kekse) und Haselnusscreme (H-Kekse) her. Eine sehr große Anzahl dieser Kekse wird gemischt und anschließend in Tüten zu je 30 Stück zufällig abgefüllt. Beim Füllvorgang beträgt die Wahrscheinlichkeit für einen V-Keks 0,7.

1.1 Berechnen Sie den Verkaufspreis für eine Tüte, wenn die Herstellungskosten pro V-Keks 0,10 DM, pro H-Keks 0,12 DM betragen und der Verkaufspreis um 50 % über den Herstellungskosten liegen soll. (2 BE)

1.2 Es werden nun folgende Ereignisse betrachtet:

E_1: „Eine beliebige Kekstüte der Firma enthält höchstens 22 V-Kekse.“

E_2: „Eine beliebige Tüte enthält mindestens 20 V-Kekse.“

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(E_1)$ und $P(E_2)$. Untersuchen Sie außerdem, ob die beiden Ereignisse stochastisch unabhängig sind. (6 BE)

2.0 In einer größeren Gebäckschale liegen 3n Kekse, wobei n eine geeignete feste natürliche Zahl mit $n \geq 3$ ist. Von diesen 3n Keksen sind genau zwei Drittel V-Kekse, ein Drittel H-Kekse. Die Kekse sind mit Schokoladenglasur überzogen, formgleich und somit äußerlich nicht unterscheidbar.

Der Schale werden nacheinander drei Kekse zufällig ohne Zurücklegen entnommen. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der H-Kekse unter den drei entnommenen Keksen an. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X lässt sich mit Hilfe der Parameter a, b $\in [0;1]$ wie folgt darstellen:

x	0	1	2	3

P(X = x)	20a	5b	2b	a

Der Erwartungswert der Zufallsgröße X beträgt $\mu = 1$.

2.1 Berechnen Sie die Parameter a und b. (4 BE)

(Teilergebnis: $a = \frac{1}{84}$)

2.2 Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X in Form eines Histogramms dar und schraffieren Sie in diesem Histogramm die zu $P(X \leq \mu)$ gehörende Fläche. (3 BE)

Fortsetzung s. nächste Seite

2.3 Würden der Gebäckschale aus 2.0 nur zwei Kekse ohne Zurücklegen entnommen, so wäre die Wahrscheinlichkeit dafür, genau zwei H-Kekse zu erhalten, gleich $\frac{1}{12}$. Berechnen Sie, wie viele Kekse demnach zu Beginn in der Schale liegen. (4 BE)

2.4.0 Nun wird n = 3 gesetzt. Die Gebäckschale enthält also neun Kekse in der unter 2.0 angegebenen Mischung. Es werden drei Kekse zufällig ohne Zurücklegen gezogen.

2.4.1 Zeichnen Sie für dieses Zufallsexperiment ein Baumdiagramm und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten sämtlicher Elementarereignisse in Form von Brüchen. (6 BE)

2.4.2 Es werden folgende Ereignisse betrachtet:

E_3: „Die Keksfüllung wechselt von Entnahme zu Entnahme.“
E_4: „Es werden mehr H-Kekse als V-Kekse entnommen.“

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(E_3)$, $P(E_4)$ und $P(\overline{E_3 \cup E_4})$.
Interpretieren Sie das Ereignis $\overline{E_3 \cup E_4}$ im Sinne der vorliegenden Thematik. (5 BE)

3.0 Die Keksfabrik stellt auch Vanillekipferln her. Dieses leicht zerbrechliche Gebäck wird automatisch in Schachteln zu je 20 Stück verpackt. Die Wahrscheinlichkeit, dass dabei ein zunächst unbeschädigtes Kipferl zum „Bruchkipferl“ wird, beträgt erfahrungsgemäß 0,02. Dieser Wert wird von der Firma in Kauf genommen.

3.1 Berechnen Sie auf drei Nachkommastellen gerundet die Wahrscheinlichkeit p dafür, in einer frisch verpackten Schachtel kein Bruchkipferl zu finden und anschließend die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

E_5: „Von fünf solchen Schachteln enthalten mindestens zwei ausschließlich unbeschädigte Kipferln.“ (4 BE)

3.2 Aufgrund von Reklamationen entsteht der Verdacht, dass der Anteil der Bruchkipferln über 2 % liegt (Gegenhypothese). Daraufhin führt die Firma vor Ort einen Signifikanztest durch. Hierbei werden 10 frisch verpackte Schachteln vorsichtig wieder geöffnet und jedes Kipferl einzeln kontrolliert. Geben Sie die Testgröße sowie die Art des Signifikanztests an und ermitteln Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 1%-Niveau. (6 BE)

Aufg.	S I	BE
1.1	Zufallsgröße Y: Verkaufspreis eines Kekses; Verkaufspreis für eine Tüte: $\text{VKP} = 30 \cdot E(Y) = 30 \cdot (0{,}15 \cdot 0{,}7 + 0{,}18 \cdot 0{,}3) = 4{,}77$	2
1.2	Zufallsgröße Z: Anzahl der V-Kekse in einer Tüte mit 30 Keksen Z ist eine B(30;0,7)-verteilte Zufallsgröße $P(E_1) = P(Z \le 22) = F_{0,7}^{30}(22) = 0{,}719$; $P(E_2) = P(Z \ge 20) = 1 - F_{0,7}^{30}(19) = 0{,}730$ $P(E_1 \cap E_2) = F_{0,7}^{30}(22) - F_{0,7}^{30}(19) = 0{,}449$; $P(E_1) \cdot P(E_2) = 0{,}525 \ne 0{,}449$ $\Rightarrow$ Die Ereignisse E_1 und E_2 sind <u>nicht</u> stochastisch unabhängig.	6
2.1	I. 21a + 7b = 1; aus $\mu = 1$: II. 3a + 9b = 1 $\Rightarrow a = \frac{1}{84}$; $b = \frac{3}{28}$	4
2.2	Histogramm; $\mu = 1$ aus 2.0; $P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$; Schraffur	3
2.3	$\frac{1}{3} \cdot \frac{n-1}{3n-1} = \frac{1}{12} \Rightarrow n = 3$. Anfangs sind 9 Kekse in der Schale.	4
2.4.1	Baumdiagramm ω_i: VVV, VVH, VHV, VHH, HVV, HVH, HHV, HHH $P(\{\omega_i\})$: $\frac{20}{84}$, $\frac{15}{84}$, $\frac{15}{84}$, $\frac{6}{84}$, $\frac{15}{84}$, $\frac{6}{84}$, $\frac{6}{84}$, $\frac{1}{84}$	6
2.4.2	$P(E_3) = \frac{21}{84}$; $P(E_4) = \frac{19}{84}$; $P(\overline{E_3 \cup E_4}) = P(\{VVV, VVH, HVV\}) = \frac{50}{84}$ $\overline{E_3 \cup E_4}$: „Mindestens zwei V-Kekse werden unmittelbar nacheinander entnommen.“	5
3.1	p = B(20; 0,02; 0) = 0,668 ($\Rightarrow$ q = 0,332) $P(E_5) = 1 - \left[\binom{5}{0} p^0 q^5 + \binom{5}{1} p^1 q^4 \right] = 0{,}955$ mit p, q wie oben.	4

3.2	T: Anzahl der Bruchkipferln unter 200 Kipferln; T ist verteilt nach B(200; 0,02) H_0: p = 0,02 $\qquad$ H_1: p > 0,02 Annahmebereich v. H_0: $[0;k]_{N_0}$ $\qquad$ Ablehnungsber. v. H_0: $[k+1;200]_N$ $P(T \geq k+1) \leq 0{,}01;\ P(T \leq k) \geq 0{,}99;\ F_{0,02}^{200}(k) \geq 0{,}99$ Aus Tabelle: k_{min} = 9 Größtmöglicher Ablehnungsbereich von H_0: $[10;200]_N$.	6
		40

Bei umfangreichen Verkehrszählungen in einer Großstadt wurden Zusammenhänge zwischen der Anzahl der vorbeifahrenden PKWs bzw. LKWs und dem Geschlecht der am Steuer sitzenden Personen festgestellt. Im Folgenden werden nur diese beiden Fahrzeugarten betrachtet. Die dabei ermittelten relativen Häufigkeiten werden als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

Nach dem Ergebnis der Zählungen handelt es sich bei 20% der betrachteten Fahrzeuge um LKWs. Je 31 von 100 der am Steuer eines Fahrzeugs sitzenden Personen sind weiblichen Geschlechts. Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei einem zufällig herausgegriffenen Auto um einen von einer Dame gesteuerten PKW handelt, beträgt 0,28.

Folgende Bezeichnungen für Ereignisse werden festgelegt:

L: „Das Fahrzeug ist ein LKW."
D: „Das Fahrzeug wird von einer Dame gesteuert."

1 Zunächst werden die durch Verknüpfung der Ereignisse L und D entstandenen Ereignisse A, B und C betrachtet:

a) $A = L \cap D$; $\qquad$ b) $B = L \cup \overline{D}$; $\qquad$ c) $C = \overline{L \cap \overline{D}}$.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A, B und C, z. B. mit Hilfe einer Vierfeldertafel, und formulieren Sie A, B und C im Sinne der vorliegenden Thematik möglichst einfach mit Worten. (8 BE)

2 Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Ereignisse L und D stochastisch abhängig sind. (3 BE)

3.0 Nun wird eine Gruppe von drei aufeinander folgenden Fahrzeugen zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der PKWs in dieser Gruppe an.

(Hinweis: Alle Wahrscheinlichkeiten sollen auf jeweils drei Stellen nach dem Komma angegeben werden.)

3.1 Zeichnen Sie für dieses Zufallsexperiment ein Baumdiagramm und geben Sie die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Pfade an. Erstellen Sie ferner eine Wertetabelle der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X und zeichnen Sie dann ein zugehöriges Histogramm. (7 BE)

Fortsetzung s. nächste Seite

Fortsetzung S I

3.2 Geben Sie für die zur Zufallsgröße X gehörige kumulative Verteilungsfunktion F eine Wertetabelle an und interpretieren Sie den Funktionswert $F(2) = 0{,}488$. (3 BE)

4.0 Nun wird eine Reihe von zehn hintereinander fahrenden Fahrzeugen betrachtet.

4.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

E_1: „Nur das fünfte Fahrzeug ist ein LKW."

E_2: „Genau die Hälfte der Fahrzeuge sind LKWs."

E_3: „Die Fahrzeuge bilden eine 'bunte Reihe', d.h. abwechselnde Reihenfolge in Bezug auf die Fahrzeugart."

(Rechengenauigkeit bei $P(E_3)$: vier Nachkommastellen.) (6 BE)

4.2 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eines der zehn Fahrzeuge ein LKW ist. (2 BE)

4.3 Berechnen Sie, welchen Wert die Wahrscheinlichkeit $p = P(L)$ haben müss-te, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,99 mindestens eines der zehn Fahrzeuge ein LKW wäre. (4 BE)

5 Zwei Jahre nach der Verkehrszählungsaktion äußern mehrere Mitglieder des Verkehrsausschusses die Vermutung, dass der Anteil der LKWs unter den betrachteten Fahrzeugen gegenüber der eingangs dargestellten Situation gestiegen sei (Gegenhypothese).

Es wird daraufhin ein Signifikanztest mit 200 zufällig ausgewählten Fahrzeugen vorgenommen. Dabei werden 45 LKWs gezählt. Geben Sie für diesen Signifikanztest die Testgröße sowie die Nullhypothese an und bestimmen Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 5%-Niveau. Entscheiden Sie mit Hilfe dieses Tests, ob die Annahme, dass der Prozentsatz der LKWs nahezu gleich geblieben ist, als bestätigt angesehen werden kann oder nicht. (7 BE)

1.0 Eine Firma stellt Fliesen her. Erfahrungsgemäß sind von 1000 Fliesen eines bestimmten Fabrikats 100 nicht trittfest, 30 weisen Farbfehler auf. Im Folgenden werden nur diese beiden Fehlerarten betrachtet, wobei angenommen werden kann, dass sie voneinander unabhängig auftreten. Interpretieren Sie die relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten.

Ein Zufallsexperiment besteht aus der Feststellung der Fehler einer zufällig ausgewählten Fliese dieses Fabrikats.

1.1 Bestimmen Sie mit Hilfe eines Baumdiagramms den feinsten Ergebnisraum dieses Zufallsexperiments. Tragen Sie auch alle Pfadwahrscheinlichkeiten in Ihr Diagramm ein. (3 BE)

1.2 Folgende Ereignisse werden betrachtet:
E_1: „Die Fliese ist nicht trittfest, besitzt aber keinen Farbfehler."
E_2: „Die Fliese besitzt höchstens einen der genannten Fehler."
Stellen Sie die Ereignisse E_1 und E_2 in aufzählender Mengenschreibweise dar, berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(E_1)$ und $P(E_2)$ und untersuchen Sie, ob die Ereignisse E_1 und E_2 stochastisch unabhängig sind.

(6 BE)

2 Nun werden aus einer sehr großen Menge eines anderen Fabrikats zwei Fliesen zufällig ausgewählt und überprüft. Berechnen Sie, wie groß die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Farbfehlers bei <u>einer</u> solchen Fliese höchstens sein dürfte, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den beiden Fliesen mindestens eine einen Farbfehler hat, höchstens 0,0975 beträgt.

(4 BE)

3.0 Der Boden eines Badezimmers wird gefliest. Erfahrungsgemäß können auf einer gefliesten Fläche von der Größe dieses Sanitärraums innerhalb des ersten Jahres nach Verlegung der betreffenden Fliesensorte insgesamt höchstens fünf Risse auftreten. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Risse in den Fliesen des Badezimmers an, die in diesem Zeitraum entstehen. Mit geeigneten Werten von a und b ($a, b \in [0;1]$) lässt sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X wie folgt darstellen:

x	0	1	2	3	4	5
P(X=x)	a	0,25	3b	0,1	b	0,05

3.1 Berechnen Sie a und b unter der Voraussetzung, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens zwei Risse auftreten, 0,8 beträgt. (4 BE)

(Ergebnis: a = 0,4; b = 0,05)

3.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der Risse innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegt.

(5 BE)

4.0 Dieselbe Firma liefert an einen Händler Porzellanbecher in Packungen zu je 20 Stück aus. Jede Packung kann eine unbekannte Anzahl von schadhaften Bechern enthalten. Der Händler prüft eine Lieferung, indem er aus jeder Packung zufällig zwei Becher <u>ohne</u> Zurücklegen entnimmt. Nur wenn beide Becher in Ordnung sind, nimmt er die betreffende Packung an.

4.1 Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit, mit der dieser Händler eine Packung annehmen wird, wenn sie <u>eine</u>, <u>drei</u> bzw. <u>zehn</u> schadhafte Becher enthält. Nehmen Sie kurz Stellung zu der Aussagekraft dieser Testmethode.

(5 BE)

4.2 Eine Lieferung besteht aus acht Packungen, von denen jede Packung genau einen schadhaften Becher enthält. Berechnen Sie jeweils, mit welcher Wahrscheinlichkeit

a) alle Packungen,

b) genau die Hälfte der Packungen,

c) mehr als die Hälfte der Packungen

angenommen werden, wenn die Wahrscheinlichkeit für die Annahme einer Packung 0,9 beträgt. (4 BE)

5.0 Die Firma geht davon aus, dass 4 % aller produzierten Becher schadhaft sind. Aufgrund einer Häufung von Reklamationen entsteht der Verdacht, dieser Anteil könnte höher liegen als erwartet (Gegenhypothese). Zur Überprüfung wird seitens der Firma ein Signifikanztest mit 100 Bechern durchgeführt.

5.1 Bestimmen Sie auf einem Signifikanzniveau von 5 % den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese. Geben Sie den bei diesem Test auftretenden Fehler 1. Art auf drei Nachkommastellen gerundet an.

(6 BE)

5.2 Erklären Sie, was man bei dem vorliegenden Test unter dem Fehler 2. Art versteht. Wie verändert sich dieser Fehler, wenn die Entscheidungsregel so abgewandelt wird, dass sich der Fehler 1. Art verkleinert?

(3 BE)

Aufg.	S II	BE
1.1	T: Trittfest; F: Farbfehler; Baumdiagramm; $\Omega = \{TF; T\overline{F}; \overline{T}F; \overline{TF}\}$	3
1.2	$E_1 = \{\overline{TF}\}$; $E_2 = \{TF; T\overline{F}; \overline{TF}\}$; $P(E_1) = 0{,}1 \cdot 0{,}97 = 0{,}097$ $P(E_2) = 1 - P(\text{"beide Fehler"}) = 1 - 0{,}1 \cdot 0{,}03 = 0{,}997$ $E_1 \cap E_2 = E_1 \Rightarrow$ Die Ereignisse sind stochastisch abhängig, da $P(E_2) \neq 1$.	6
2	p: Wahrscheinlichkeit für einen Farbfehler bei einer einzelnen Fliese. q = 1 – p: Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Fliese farbfehlerfrei ist. $1 - q^2 \leq 0{,}0975$; $q^2 \geq 0{,}9025$; $\lvert q \rvert \geq 0{,}95$; da $q > 0: q \geq 0{,}95$; $1 - p \geq 0{,}95$; $p \leq 0{,}05$	4
3.1	(1) a + 0,25 + 3b = 0,8; (2) a + 0,25 + 3b + 0,1 + b + 0,05 = 1 $\Rightarrow$ a = 0,4; b = 0,05	4

3.2	$E(X) = 0{,}25 + 0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}25 = 1{,}3$ $Var(X) = 0{,}25 + 0{,}6 + 0{,}9 + 0{,}8 + 1{,}25 - 1{,}69 = 2{,}11$; $\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{2{,}11} = 1{,}45$ $c = E(X) + \sigma = 2{,}75$; $d = E(X) - \sigma = -0{,}15$; $P(d < X < c) = 0{,}4 + 0{,}25 + 0{,}15 = 0{,}8$	5
4.1	$P_1 = \frac{19}{20} \cdot \frac{18}{19} = 0{,}9$; $P_3 = \frac{17}{20} \cdot \frac{16}{19} = \frac{68}{95} \approx 0{,}716$; $P_{10} = \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} = \frac{9}{38} \approx 0{,}237$ Die Testmethode ist nicht sehr aussagekräftig, da selbst bei 10 schadhaften Bechern die Packung noch mit der relativ hohen Wahrscheinlichkeit von 23,7% angenommen wird.	5
4.2	a) $P_a = (0{,}9)^8 = 0{,}4305$; b) $P_b = B(8;0{,}9;4) = 0{,}0046$ c) $P_c = \sum_{i=5}^{8} B(8;0{,}9;i) = 1 - \sum_{i=0}^{4} B(8;0{,}9;i) = 1 - 0{,}0050 = 0{,}9950$	4
5.1	Testgröße T: Anzahl der defekten Becher T ist eine B(100; 0,04)–verteilte Zufallsgröße H_0: $p = 0{,}04$; Nicht-Verwerfungsbereich von H_0: $\{0, \ldots, k-1\}$ H_1: $p > 0{,}04$ Ablehnungsbereich von H_0: $\{k, \ldots, 100\}$ Entscheidungsregel: $P(T \geq k) \leq 0{,}05$ $\sum_{i=k}^{100} B(100; 0{,}04; i) \leq 0{,}05$ bzw. $\sum_{i=0}^{k-1} B(100; 0{,}04; i) \geq 0{,}95$ Aus Tabelle: $k - 1 = 7$; $k_{min} = 8$ Maximaler Ablehnungsbereich von H_0: $\{8, \ldots, 100\}$ $\alpha' = 1 - 0{,}952 = 0{,}048$ Fehler 1. Art.	6
5.2	Fehler 2. Art: Dies ist die Wahrscheinlichkeit, die Annahme der Firma bezüglich der schadhaften Becher zu teilen, obwohl diese Annahme in Wirklichkeit falsch ist. Verkleinert sich der Fehler 1. Art, dann vergrößert sich der Fehler 2. Art.	3
		40

1.0 Max Molle ist ein Junggeselle von 22 Jahren, der noch bei seinen Eltern wohnt. Wir treffen ihn gegen 18.00 Uhr auf einem Volksfest. An einer Schießbude gibt Herr Molle 8 Schüsse auf Papierblumen ab. Seine Trefferwahrscheinlichkeit pro Schuss beträgt konstant $p = \frac{2}{3}$.

Herrn Molles Mutter hat heute ihren 46. Geburtstag und deshalb möchte er sie am Abend mit genau 6 Papierblumen überraschen. Bei mehr als 6 Treffern will er die übrigen Blumen der netten jungen Dame schenken, die er gerade kennen gelernt hat. Bei weniger als 6 Treffern soll diese neue Bekannte alle Blumen bekommen.

Bestimmen Sie jeweils auf 4 Nachkommastellen gerundet die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

1.1 von Molles 8 Schüssen nur der erste und der letzte Schuss treffen; (2 BE)

1.2 Herrn Molles Mutter heute ihre 6 Papierblumen erhält; (3 BE)

1.3 die junge Dame mindestens eine Blume erhält. (4 BE)

2 Nach dem Schießen besucht Herr Molle mit der neuen Bekannten eine Bar und spielt dort ein Würfelspiel. Er wirft gleichzeitig zwei ideale, unterscheidbare Würfel.

Folgende Spielregel wird vereinbart:

Ist der Betrag der Differenz der geworfenen Augenzahlen gerade, so erhält Herr Molle den entsprechenden Betrag in DM von der Dame, bei einem ungeraden Differenzbetrag zahlt Herr Molle den entsprechenden Betrag in DM an diese.

Die Zufallsgröße X gibt den Gewinn (bzw. Verlust) von Herrn Molle bei einem solchen Spiel an.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X in tabellarischer Form und zeichnen Sie mit Hilfe einer Wertetabelle den Graphen der kumulativen Verteilungsfunktion der Zufallsgröße X. (7 BE)

3 Leider trinkt Herr Molle in der Bar ein paar Gläser Bier und daher möchte die junge Dame lieber gehen. Sie lässt sich jedoch überreden, ihre Entscheidung von einem weiteren Spiel abhängig zu machen: Herr Molle zieht aus einem gut durchmischten Kartenspiel (bestehend aus 32 Karten, darunter 4 Asse) ohne Zurücklegen zufällig nacheinander 10 Karten. Befindet sich unter diesen 10 Karten kein Ass, will die Dame noch etwas länger bleiben.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die junge Dame aufgrund des Spielausgangs die Bar verlässt. (4 BE)

4.0 Herrn Molle fällt um 22.00 Uhr der Geburtstag seiner Mutter wieder ein. Auf dem Heimweg kommt er noch einmal an der Schießbude vorbei.

Der Budenbesitzer behauptet, dass Molles Trefferwahrscheinlichkeit pro Schuss jetzt auf Grund seines inzwischen erhöhten Alkoholspiegels nicht mehr $\frac{2}{3}$ beträgt, sondern dass sie größer oder kleiner geworden ist (Gegenhypothese). Herr Molle wettet, dass er weiterhin mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ trifft und bietet an, dies durch eine Testreihe von 30 Schuss nachzuweisen, bei denen er mindestens 18-, höchstens 22-mal treffen will.

4.1 Formulieren Sie Testgröße und Testart und geben Sie die Nullhypothese H_0 an sowie den Annahme- und den Ablehnungsbereich von H_0. Berechnen Sie dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Herr Molle seine Wette verliert, obwohl er immer noch mit einer Quote von $\frac{2}{3}$ trifft. (6 BE)

4.2 Bestimmen Sie den kleinstmöglichen Annahmebereich der Nullhypothese symmetrisch zum Erwartungswert 20, der gewählt werden muss, wenn der Fehler 1. Art höchstens 5% beträgt. (5 BE)

5.0 Ein neugieriger Nachbar von Herrn Molle führt schon seit längerem Auf-zeichnungen über dessen abendliches Nachhausekommen. Kommt Herr Molle nach 22.00 Uhr heim, notiert der Nachbar dies als „Verspätung“. Die Zufallsgröße Y gibt Herrn Molles Verspätungen in Stunden (gerundet) an. Es ergibt sich dabei mit a, b $\in$ [0; 1] folgende Wahrscheinlichkeitstabelle:

y	0	1	2	3	4	5
P(Y = y)	a	0,40	0,25	a + b	b	0,05

5.1 Bestimmen Sie a und b, wenn $P(Y \leq 2) = 0{,}70$ ist.

(Ergebnis: a = 0,05; b = 0,10) (3 BE)

5.2 Errechnen Sie, wie viele Stunden Herr Molle im Beobachtungszeitraum durchschnittlich zu spät nach Hause kommt.

(Ergebnis: E(Y) = 2) (2 BE)

5.3 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(\left| Y - E(Y) \right| \leq \sqrt{Var(Y)})$. (4 BE)

1 Gegeben ist die Schar der reellen Funktionen f_a mit der in R maximalen Definitionsmenge D_{fa} durch f_a : x F $f_a(x) = (1 - \frac{x}{a}) \cdot \ln\left| x - a \right|$ mit a!R\{0}.

1.1 Bestimmen Sie die Definitionsmenge D_{f_a} und die Nullstellen von f_a in Abhängigkeit von a. Zeigen Sie, dass die Graphen von f_a punktsymmetrisch sind zum Punkt S(a I 0). (5 BE)

1.2 Bestimmen Sie $f_a´(x)$ und $f_a`(x)$ für x>a , die Koordinaten und Art der Extrempunkte des Graphen von f_a und die maximalen Intervalle mit gleichartigem Krümmungsverhalten des Graphen von f_a in Abhängigkeit von a . (Teilergebnis: $f_a´(x) = -\frac{1}{a}(1 + \ln(x - a))$, x>a)(10 BE)

1.3 Ermitteln Sie das Verhalten von $f_a(x)$ und $f_a´(x)$ für xGa und xG$\pm\infty$. (6 BE)

1.4 Zeichnen Sie den Graphen von $f_{1/e}$ (also $a = \frac{1}{e}$) unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse in ein kartesisches Koordinatensystem für $-1 \leq x \leq 1{,}5$ (1 LE = 4 cm). (5 BE)

1.5 Ermitteln Sie eine Stammfunktion von f_a für x>a. Hinweis: Sie können zum Beispiel mit der Substitution z=x– a beginnen. (Mögliches Ergebnis: $\frac{1}{4a}(x-a)^2(1-2\cdot\ln(x-a))$) (6 BE)

1.6 Die Integralfunktion F ist gegeben durch F: x F $F(x) = \int_{1+\frac{1}{e}}^{x} f_{1/e}(t)\,dt$, $x > \frac{1}{e}$. Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x \to \frac{1}{e}} F(x)$ und interpretieren Sie das Ergebnis am Graphen von $f_{1/e}$. (6 BE)

2 In dieser Aufgabe soll für eine Schisprungschanze die Kurve für die Bahn, auf der die Springer landen, gefunden werden. Dabei soll für die Landebahn y = L(x) die

Differenzialgleichung $y' - \frac{2}{x} \cdot y = 0{,}1$ gelten. Die Flugbahn für die unterschiedlich guten Springer wird für $x \geq 0$ beschrieben durch die Funktion $g_a : x \mapsto g_a(x) = x \cdot (0{,}1 - \frac{1-a}{200} x)$, wobei x die horizontale Flugweite in Meter angibt und a ein dimensionsloser Parameter ist, der vom Springer abhängt und für den gilt: $0 \leq a \leq 0{,}3$. Der Absprungspunkt befindet sich im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems.

2.1 Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung mit der Methode der Variation der Konstanten sowie diejenige Lösung für die Landebahn, bei der ein Springer mit dem Parameterwert 0,2 die horizontale Flugweite von 100 m erzielt. (9 BE)
(Ergebnis: $y = -0{,}1 \cdot x - 0{,}002 \cdot x^2$)

2.2 Damit die Springer gefahrlos landen können, soll am jeweiligen Aufsprungsort gelten: Die Steigung der Landebahn ist um 0,2 größer als die Steigung der Flugbahn des Springers im Moment des Aufsprungs. Zeigen Sie, dass diese Bedingung bei der gefundenen Lösung für L und der Flugbahn für a=0,2 erfüllt ist. (4 BE)

2.3 Zeichnen Sie den Graphen der Sprungbahn für a=0,2 und den Graphen der gefundenen Landebahn für $0<x<110$ (x-Achse:10 LE = 1cm; y-Achse: 5 LE = 1cm) in ein gemeinsames Koordinatensystem.
(4 BE)

2.4 Berechnen Sie die Sprungweite, die ein Springer mit dem Parameter a=0,1 bei obiger Landebahn erzielt, und überprüfen Sie die Aufsprungbedingung aus Aufgabe 2.2. Skizzieren Sie die Flugbahn für a=0,1 in obiger Zeichnung. (5 BE)

1 Gegeben ist eine Schar von reellen Funktionen f_a mit $a \in R$ und der in R maximalen Definitionsmenge D_{f_a} durch $f_a : x \mapsto \frac{x-2}{x^2 - ax + 4}$.

1.1 Bestimmen Sie D_{f_a} und die Art der Definitionslücken von f_a jeweils in Abhängigkeit von a. (8 BE)

1.2 Ermitteln Sie die Nullstelle von f_a und die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen von f_a jeweils in Abhängigkeit von a. (6 BE)

1.3 Bestimmen Sie für a=2 die Art und die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von f_2, und zeichnen Sie den Graphen von f_2 für $-4 < x < 6$ (x-Achse:1 LE = 1 cm; y-Achse: 1 LE = 4 cm). (10 BE)

1.4 Die Integralfunktion F ist definiert durch F: x F $\int_0^x f_2(t)dt$ mit x!R. Ermitteln Sie die Lage und Art der Extremstelle sowie die Lage der Wendestellen des Graphen von F. Geben Sie die Bedeutung von F(2) für den Graphen von F und für den Graphen von f_2 an. (5 BE)

2 Gegeben ist nun die Funktion g mit g: x F4·arctan($\frac{|x|-4}{|x|+4}$) mit der Definitionsmenge D_g=R .

2.1 Geben Sie die Nullstellen von g an, und bestimmen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen von g und das Verhalten von g(x) für x G%U sowie die Gleichung der Asymptote des Graphen von g. (4 BE)

2.2 Ermitteln Sie das Monotonieverhalten und die Art und Lage des Extrempunktes des Graphen von g. Untersuchen Sie das Verhalten von $g'(x)$ in der Umgebung des Extrempunktes.
(Teilergebnis: $g'(x)=\frac{16}{x^2+16}$ für $x>0$) (7 BE)

2.3 Zeichnen Sie den Graphen von g für $-6 < x < 6$ in ein neues Koordinatensystem(1 LE = 1 cm), und berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts des endlichen Flächenstücks, das der Graph von g mit der x-Achse einschließt. (10 BE)

3 Eine Metallkugel befindet sich in einer mit Öl gefüllten senkrechten Röhre. Zum Zeitpunkt t=0 wird die Kugel aus der Ruhelage losgelassen und fällt in der Röhre nach unten. Für die Geschwindigkeit v(t) der Kugel zum Zeitpunkt t, t>0 gilt folgende Differenzialgleichung: $k\cdot v' + v = g\cdot b$. Dabei bedeuten g die Maßzahl der Erdbeschleunigung und k, b > 0 Konstanten, die von der Größe und Dichte der Kugel und der Viskosität und Dichte des Öls abhängen.

3.1 Bestimmen Sie v(t) mit der Methode der Variation der Konstanten.
(Ergebnis: $v(t)= g\cdot b\cdot\left(1 - e^{-\frac{t}{k}}\right)$) (8 BE)

3.2 Ermitteln Sie das Verhalten von v(t) für tGU, und interpretieren Sie das Ergebnis physikalisch. (2 BE)

BE 1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen

$$f_a: x \mapsto \frac{-x^2-4x+a}{x} \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}$$

in der von a unabhängigen Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

8 1.1 Bestimmen Sie die Art der Definitionslücke sowie Lage, Anzahl und Vielfachheit der Null-
stellen der Funktion f_a in Abhängigkeit von a.

5 1.2 Zeigen Sie, dass alle Graphen der Funktionen f_a für $a \neq 0$ dieselben Asymptoten besitzen und punktsymmetrisch zum Punkt $Z(0; -4)$ verlaufen.

6 1.3 Weisen Sie nach, dass für die Funktionsgleichung der ersten Ableitungsfunktion von f_a gilt:

$$f_a'(x) = \frac{-x^2-a}{x^2}$$

Untersuchen Sie, für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ der Graph der zugehörigen Funktion f_a Stellen mit waagrechter Tangente besitzt, und beurteilen Sie ohne weitere Rechnung, ob diese Stellen Extremalstellen der Funktion f_a sind.

4 1.4 Berechnen Sie nun $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Gerade h: $y = 3x + 4$; $x \in \mathbb{R}$ Tangente an den

Graphen der zugehörigen Funktion f_a an der Stelle $x_o = -1$ ist.

Setzen Sie für alle weiteren Teilaufgaben **a = – 4**.

7 1.5 Bestimmen Sie für die Funktion f_{-4} die maximalen Monotonieintervalle, und geben Sie die Koordinaten und die Art der Extremalpunkte des Graphen der Funktion f_{-4} an.

7 1.6 Weisen Sie nach, dass die Ableitungsfunktion f'_{-4} der Funktion f_{-4} für $|x| \to \infty$ einen Grenzwert g besitzt, und geben Sie die Bedeutung dieses Grenzwertes g für den Verlauf des Graphen der Funktion f_{-4} an.
Ermitteln Sie dann, für welche $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die zugeordneten Funktionswerte der Ableitungsfunktion $f'_{-4}(x)$ um weniger als $\varepsilon = \frac{1}{900}$ vom Grenzwert g abweichen.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE	*Fortsetzung A I*
5	1.7 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f_{-4} und seine Asymptoten für $x \in [-6; 6]$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Erstellen Sie dazu unter Verwendung aller vorliegenden Ergebnisse eine geeignete Wertetabelle. Verwenden Sie für die Zeichnung eine eigene Seite mit dem Koordinatenursprung in der Seitenmitte. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm.
7	1.8 Eine Parallele zur x-Achse im Abstand 1 schließt im zweiten Quadranten mit dem Graphen der Funktion f_{-4} ein endliches Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück im Schaubild von Teilaufgabe 1.7, und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts.
5	1.9 F_{-4} sei eine beliebige Stammfunktion der Funktion f_{-4}. Beurteilen Sie mit Hilfe der graphischen Darstellung in Teilaufgabe 1.7, ob der Graph der Stammfunktion F_{-4} Extremalpunkte, Wendepunkte oder Terrassenpunkte besitzt.
	2.0 Für den Wert W(t) eines Autos (in DM) in Abhängigkeit von der Zeit $t \geq 0$ (in Tagen) gelte der Zusammenhang $W(t) = W_o \cdot e^{kt}$ mit einer geeigneten Konstanten k und dem Neupreis W_o. Die Benennungen können in den Formeln jeweils weggelassen werden.
3	2.1 Ein Händler geht davon aus, dass sich der Wert eines bestimmten Autotyps nach 3,5 Jahren (1 Jahr = 360 Tage) halbiert hat. Berechnen Sie daraus die Konstante k. (Ergebnis: $k = -\frac{\ln 2}{1260}$)
3	2.2 Zum Zeitpunkt $t = t_E$ hat ein Auto dieses Typs, das einen Neupreis von 35000 DM hat, noch den „Schrottwert“ 1500 DM. Berechnen Sie diesen Zeitpunkt t_E.
6	2.3 Nun wird die Ableitungsfunktion $\dot{W}: t \mapsto \dot{W}(t)$ mit $\dot{W}(t) = \frac{dW(t)}{dt}$ und $t \in]0; t_E[$ betrachtet. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $\dot{W}(t)$ an den Randstellen des Definitionsbereichs, und interpretieren Sie die Ergebnisse im gegebenen Sachzusammenhang.
66	

BE	
	1.0 Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto 2 \cdot \frac{1+\ln(x^2)}{x}$ in der maximal möglichen Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

4 1.1 Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung verläuft, und bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f.

5 1.2 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte f(x) für $x \to 0$, $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$.

4 1.3 Berechnen Sie die erste und die zweite Ableitung der Funktion f.

(Teilergebnis: $f'(x) = 2 \cdot \frac{1-\ln(x^2)}{x^2}$)

9 1.4 Ermitteln Sie die Koordinaten und die Art der relativen Extremalpunkte sowie die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen der Funktion f.

6 1.5 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f in ein kartesisches Koordinatensystem im Bereich $-5 \le x \le 5$. Verwenden Sie dazu die bisherigen Ergebnisse und berechnen Sie zusätzlich die Funktionswerte f(0,4), f(1) und f(5).
Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm.

2.0 Gegeben sind nun die reellen Funktionen $g_a: x \mapsto (1-a)\cdot x + \frac{2}{x}$ mit $a \in \mathbb{R}$ in der maximal möglichen Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

5 2.1 Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a die Anzahl und gegebenenfalls die Abszissen der Punkte, in denen der Graph der Funktion g_a waagrechte Tangenten besitzt.

Nun werden die Funktionen f aus Aufgabe 1 und $g_1: x \mapsto \frac{2}{x}$ (für a = 1) in $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ betrachtet.

6 2.2 Berechnen Sie für die Graphen der Funktionen f und g_1 die Abszissen ihrer Schnittpunkte, und zeichnen Sie den Graphen der Funktion g_1 im Bereich $-5 \le x \le 5$ in das Schaubild aus Teilaufgabe 1.5 ein.
(Teilergebnis: $x_1 = -1$)

4 2.3 Zeigen Sie, dass für $x < 0$ und $C \in \mathbb{R}$ die folgende Beziehung gilt:

$$\int \frac{\ln(x^2)}{x}\,dx = (\ln(-x))^2 + C.$$

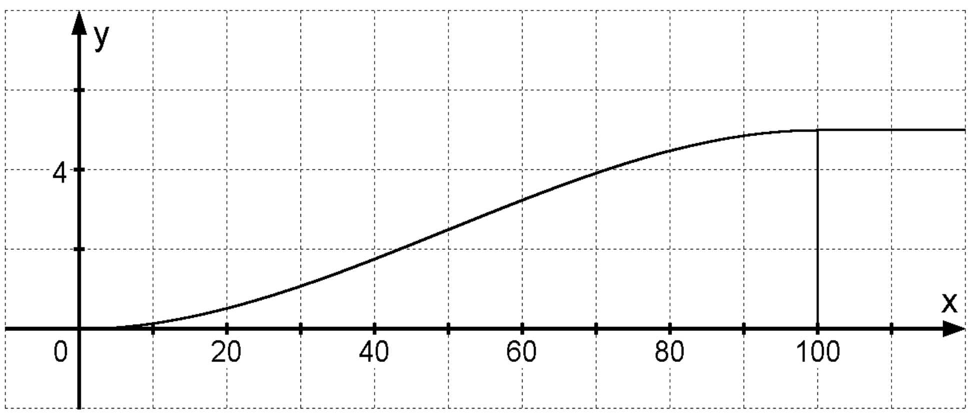
Fortsetzung siehe nächste Seite

BE *Fortsetzung A I :*

5 2.4 Die Graphen der Funktionen f und g_1 und die Gerade mit der Gleichung $x = -3$ schließen im dritten Quadranten des Koordinatensystems ein endliches Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in Ihrer Zeichnung und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts.

7 2.5 Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente t_k an den Graphen der Funktion g_1 an der Stelle $x = k$ für $k \in \mathbb{R}$ und $k > 0$.
Tragen Sie für den Sonderfall $k = 2$ die Tangente t_2 in Ihre Zeichnung ein.
Weisen Sie nun nach, dass der Flächeninhalt des Dreiecks, das die Tangente t_k mit den Koordinatenachsen einschließt, von k unabhängig ist.
(Teilergebnis: $t_k : y = -\frac{2}{k^2} \cdot x + \frac{4}{k}$)

3.0 Zu einer 5 m hohen Brücke soll auf einer Länge von 100 m eine Straßenauffahrt gebaut werden. Im Folgenden werden nur die Maßzahlen der Längen betrachtet.



In dem im Bild dargestellten Koordinatensystem kann das Profil der Straße bei geeigneter Wahl der reellen Parameter a, b und c modellhaft durch folgende reelle Funktion s beschrieben werden:

$$s:\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ ax^3 + bx^2 + cx & \text{für } 0 \le x \le 100 \\ 5 & \text{für } x > 100 \end{cases}$$

7 3.1 Bestimmen Sie die Werte für a, b und c so, dass der Straßenverlauf an den Übergangsstellen dem Bild entspricht, d.h. weder Lücken noch Kanten aufweist.

4 — 66	3.2 Ermitteln Sie, an welcher Stelle die Auffahrt die größte Steigung besitzt.

1 Gegeben ist eine Schar von Funktionen f_k mit der in R maximalen Definitionsmenge D_k durch: $f_k: x \mapsto \arcsin(\frac{k-x^2}{x^2})$ mit $k \in R^+$.

1.1 Bestimmen Sie D_k, das Symmetrieverhalten des Graphen von f_k und das Verhalten von $f_k(x)$ an den Rändern der Definitionsmenge. (8 BE)

1.2 Geben Sie die maximalen Intervalle an, in denen der Graph von f_k streng monoton steigend bzw. streng monoton fallend verläuft. (5 BE)
(Teilergebnis: $f_k'(x) = \frac{-2k}{x\sqrt{2kx^2-k^2}}$)

2 Gegeben ist die abschnittsweise definierte Funktion h mit der Definitionsmenge D_h = R durch h: $x \mapsto \begin{cases} f_8(x) \text{ für } |x| \geq 2 \\ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi\sqrt{4-x^2}}{x+4} \text{ für } |x| < 2 \end{cases}$ wobei $f_8(x)$ der Funktionsterm aus Teilaufgabe 1 mit k=8 ist.

2.1 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion h. (5 BE)

2.2 Untersuchen Sie, ob die Funktion h an der Stelle x = 2 stetig und differenzierbar ist. (6 BE)

2.3 Bestimmen Sie die Koordinaten und die Art der Extrempunkte des Graphen von h ohne Verwendung der 2. Ableitung für $x > -2$. (8 BE)

2.4 Zeichnen Sie den Graphen von h unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse im Bereich $-2<x<4$ (1 LE = 2 cm). (5 BE)

2.5 Der Graph von h für $|x| < 2$, die positive x-Achse und die Gerade x = 2 begrenzen im ersten Quadranten eine endliche Fläche A, deren Flächenmaßzahl durch eine Näherung (2 Stellen Genauigkeit) abzuschätzen ist. Bilden Sie dazu die Ober- und Untersumme bei einer Rechtecksbreite von 0,50 LE. (5 BE)

2.6 Ermitteln Sie die Integralfunktion H mit $H(x) = \int_2^x h(t)dt$, $x \geq 2$ in integralfreier Darstellung. (6 BE)

(Teilergebnis: $\int h(x)dx = 4\ln(\sqrt{(x^2-4)}+x) + x \arcsin(\frac{8-x^2}{x^2}) + C$ mit $C \in \mathbb{R}$ für $x>2$)

2.7 Bestimmen Sie vom Graphen der Funktion H die Koordinaten und die Art des Extrempunktes im Inneren der Definitionsmenge. (4 BE)

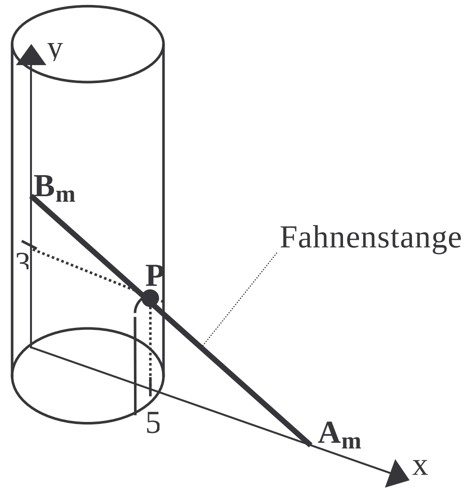
3 Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung $y' + \frac{y}{x+1} = \frac{1}{x(x+2)}$ mit $x \in R^+$ mittels der Methode der Variation der Konstanten. (8 BE)

BE		
	1.0	Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto 2x - 2x \cdot e^{1-x^2}$ mit $x \in \mathbb{R}$.
6	1.1	Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen der Funktion f, und bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f.
5	1.2	Zeigen Sie, dass gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x \cdot e^{1-x^2}) = 0$ und bestimmen Sie damit die Gleichung der Asymptote des Graphen der Funktion f.
4	1.3	Bestimmen Sie die erste und die zweite Ableitung der Funktion f. (Mögliches Teilergebnis: $f''(x) = 4x \cdot (3 - 2x^2) \cdot e^{1-x^2}$)
8	1.4	Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten des Graphen der Funktion f, und geben Sie die Koordinaten seiner Wendepunkte an.
4	1.5	Zeigen Sie, dass die Ableitungsfunktion f ' im Intervall [0; 1] genau eine Nullstelle besitzt.
5	1.6	Ermitteln Sie für die Nullstelle aus Teilaufgabe 1.5 einen Näherungswert mit Hilfe des Newton-Verfahrens. Verwenden Sie als Startwert $x_o = 0{,}3$, führen Sie zwei Näherungs-schritte durch und runden Sie das Ergebnis auf zwei Nachkommastellen.
4	1.7	Die Ableitungsfunktion f ' besitzt genau zwei Nullstellen (Nachweis nicht erforderlich). Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Information und unter Verwendung bereits vorliegender Ergebnisse die relativen Extrema der Funktion f. Geben Sie die Koordinaten der dazu-gehörigen Punkte auf zwei Nachkommastellen gerundet an.
6	1.8	Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f mit Hilfe aller bisherigen Ergebnisse in ein kartesisches Koordinatensystem im Bereich $-2 \le x \le 2$. Berechnen Sie für die Zeichnung zusätzlich den Funktionswert f(2), und tragen Sie auch die Asymptote des Graphen der Funktion f ein. Verwenden Sie für die Zeichnung eine eigene Seite mit dem Koordinatenursprung in der Seitenmitte und den Maßstab 1LE = 2cm.
7	1.9	Der Graph der Funktion f , seine Asymptote und die Gerade mit der Gleichung x = 1 begrenzen ein endliches Flächenstück. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in der Zeichnung von Teilaufgabe 1.8 und berechnen Sie seine Flächenmaßzahl. Hinweis: Verwenden Sie zur Integration die erste Ableitungsfunktion der Funktion

$$g\colon x \mapsto e^{1-x^2}\,;\; x \in \mathbb{R}\,.$$

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE *Fortsetzung A II*



2.0 Auf einem ebenen Gelände steht ein sehr hoher, zylinderförmiger Turm mit einem Innendurchmesser von 5,0 m. Durch das 3,0 m hohe Tor soll eine möglichst lange, gerade Fahnenstange in das Innere des Turms gebracht werden (siehe Bild).
Im Folgenden soll ermittelt werden, wie lang eine solche Fahnenstange maximal sein darf.

2 2.1 Wir betrachten dazu in einem Koordinatensystem die Menge der Geraden g_m mit der Steigung m, $m \in \mathbb{R}$ und $m < 0$, durch den Punkt P(5; 3).
Geben Sie die Gleichung einer solchen Geraden g_m in Abhängigkeit von m an.

3 2.2 Die Gerade g_m schneidet die x-Achse im Punkt A_m und die y-Achse im Punkt B_m.
Berechnen Sie die Koordinaten dieser Punkte in Abhängigkeit von m.

3 2.3 Die Länge der von den beiden Punkten A_m und B_m begrenzten Strecke in Abhängigkeit von m wird mit $\ell(m)$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass für das Quadrat von $\ell(m)$ gilt:
$\ell^2(m) = (3-5m)^2 \cdot (1 + \frac{1}{m^2})$ mit $m \in \mathbb{R}$ und $m < 0$.

9 2.4 Die Fahnenstange darf höchstens so lang sein wie die kürzeste dieser Streckenlängen.
Berechnen Sie m so, dass $\ell^2(m)$ und damit auch $\ell(m)$ seinen absolut kleinsten Wert annimmt, und ermitteln Sie damit die maximale Länge der Fahnenstange.
(Teilergebnis: $\frac{d\ell^2(m)}{dm} = \frac{2(5m-3)}{m^3} \cdot (5m^3+3)$)

66

BE 1.0 Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto x^3 \cdot e^{-x}$ mit $D_f = \mathbb{R}$.

6 1.1 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte f(x) für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$, und geben Sie Lage und Art der Nullstelle der Funktion f an.

7 1.2 Bestimmen Sie für die Funktion f die maximalen Monotonieintervalle, und geben Sie die Koordinaten und die Art des Extremalpunktes des Graphen der Funktion f an.

6 3.1 Skizzieren Sie unter Berücksichtigung nur der bisher vorliegenden Ergebnisse den prinzipiellen Verlauf des Graphen von f.

Geben Sie sodann die Anzahl der Lösungen der Gleichung $f(x) = a$ in Abhängigkeit von
$a \in \mathbb{R}$ an.

5 1.4 Ermitteln Sie die Lösung der Gleichung aus Teilaufgabe 1.3 für $a = -2$ mit Hilfe des Newton-Verfahrens auf zwei Nachkommastellen gerundet. Führen Sie zwei Näherungs-
schritte durch, benutzen Sie als Startwert $x_0 = -1$.

2.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $g_k : x \mapsto \frac{2x}{x^2 + k}$ mit $k \in \mathbb{R}$
in der von k abhängigen, größtmöglichen Definitionsmenge $D_{g_k} \subset \mathbb{R}$.

3 2.1 Geben Sie die größtmögliche Definitionsmenge D_{g_k} in Abhängigkeit von k an.

4 2.2 Untersuchen Sie den Graphen der Funktion g_k auf Symmetrie, und bestimmen Sie
das Verhalten der Funktionswerte $g_k(x)$ für $|x| \to \infty$.

9 2.3 Ermitteln Sie ohne Verwendung der 2. Ableitung diejenigen Werte von $k \in \mathbb{R}$, für die

die zugehörige Funktion g_k relative Extrema besitzt. Geben Sie für diesen Fall auch
die Koordinaten und die Art der Extremalpunkte an.

7 2.4 Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen g_1 (für k = 1) und g_e (für k = e) in ein kartesisches Koordinatensystem im Bereich $-1 \le x \le 5$. Verwenden Sie für die Zeichnung alle bisherigen Ergebnisse und erstellen Sie eine Wertetabelle für ganzzahlige x-Werte.
Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 2 cm.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE *Fortsetzung A II:*

7 2.5 Gegeben sind nun die Funktionen $G_k : x \mapsto \ln(x^2 + k)$ mit $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$ und $x \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie, dass jede Funktion G_k eine Stammfunktion der entsprechenden Funktion g_k
aus 2.0 ist, berechnen Sie den Integralwert $I = \int_0^2 (g_1(x) - g_e(x))dx$ und interpretieren Sie Ihr Ergebnis geometrisch.

3.0 Bei einer bestimmten gedämpften Schwingung kann mathematisch idealisiert und ohne Verwendung von Einheiten die Auslenkung s(t) in Abhängigkeit von der Zeit t für $t \ge 0$

durch den folgenden Term beschrieben werden:

$$s(t) = 2 \cdot e^{-t} \cdot [\cos(5t) + 0{,}2 \cdot \sin(5t)].$$

7 3.1 Bilden Sie die erste Ableitung von s(t) nach der Zeit t und begründen Sie, dass die Extremalpunkte der Auslenkung s(t) jeweils auf einem der Graphen der Funktionen $y = 2 \cdot e^{-t}$ oder $y = -2 \cdot e^{-t}$ liegen.

(Zur Kontrolle: $\frac{ds(t)}{dt} = -10{,}4 \cdot e^{-t} \cdot \sin(5t)$)

5 3.2 Zeigen Sie, dass die Zeitdifferenz zwischen zwei unmittelbar aufeinander folgenden Maxima der Auslenkung konstant $\Delta t = 0{,}4 \cdot \pi$ beträgt.

Berechnen Sie, auf wie viel Prozent die Auslenkung von einem beliebigen Maximum zum nächsten Maximum abnimmt.

66

1 Aus einem gut gemischten Kartenspiel mit 32 Karten erhält ein Spieler 5 Karten. Als Treffer gelten die drei Karten Pik As, Herz As und Karo As. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Treffer in der Hand des Spielers an. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X in Tabellenform auf vier Nachkommastellen genau, und berechnen Sie Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung der Zufallsgröße X . (7 BE)

2 Ein Händler kauft eine große Anzahl von Energiesparlampen. Der Produzent teilt mit, dass die Wahrscheinlichkeit für eine defekte Lampe 3% beträgt. Die Lampen werden nacheinander mit Zurücklegen geprüft.

2.1 Der Händler prüft 5 Lampen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:

A: „Genau eine geprüfte Lampe ist defekt."
B: „Höchstens eine geprüfte Lampe ist defekt."
C: „Nur die erste geprüfte Lampe ist defekt."

D: „Zwei aufeinanderfolgend geprüfte Lampen sind defekt, die anderen drei funktionieren."

Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_B(A)$. (6 BE)

2.2 Berechnen Sie, wie viele Lampen mindestens getestet werden müssen, um mit über 95% Wahrscheinlichkeit mindestens eine defekte Lampe zu finden. (4 BE)

2.3 Händler und Produzent haben einen Preisnachlass vereinbart, falls in einer Stichprobe von 40 zufällig ausgewählten Lampen mehr als 2 defekt sind.

2.3.1 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Preisnachlass gewährt wird, obwohl die Lieferung nur 3% defekte Lampen enthält. (3 BE)

2.3.2 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Händler keinen Nachlass erhält, obwohl 6% der Lampen dieser Lieferung defekt sind. (3 BE)

2.4 Der Händler hat den Verdacht, dass einige Teillieferungen 10% defekte Lampen enthalten, und möchte eine derartige Lieferung besser von den Lieferungen mit 3% unterscheiden. Deshalb will er künftig eine Stichprobe von 100 Lampen ziehen. Er möchte mit mindestens 88% Sicherheit eine solche Lieferung mit 10% defekten Lampen erkennen.

2.4.1 Ermitteln Sie, ab wie vielen defekten Lampen er sich für eine Defektwahrscheinlichkeit von 10% entscheiden soll. (4 BE)

2.4.2 Ermitteln Sie das Risiko, dass eine normale Lieferung (3% defekt) vom Händler beanstandet wird, wenn man sich ab 7 defekten Lampen für eine Defektwahrscheinlichkeit von 10% entscheidet, und beurteilen Sie kurz die neue Prüfregelung des Händlers im Vergleich zur Regel aus Aufgabe 2.3. (3 BE)

3 Die Kreiswehrersatzämter eines Bereichs mustern pro Quartal 40.000 junge Männer. Erfahrungsgemäß äußern 40% die Absicht, Zivildienst leisten zu wollen.

3.1 Ermitteln Sie mit Hilfe der Tschebyschow-Ungleichung ein möglichst kleines Intervall, in dem mit mindestens 90% Wahrscheinlichkeit die Anzahl der Zivildienstleistenden liegt. (5 BE)

3.2 Verwenden Sie zur Beantwortung der Frage 3.1 die Normalverteilung als Näherung und begründen Sie kurz die Abweichung der Resultate. (5 BE)

BE

In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind der Punkt A(1; 4; –3) und die Gerade

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R} \text{ gegeben.}$$

3 — 1 Berechnen Sie die Entfernung $d(\lambda)$ des Punktes A von einem beliebigen Punkt P_λ der Geraden g.
(Ergebnis: $d(\lambda) = \sqrt{36+5\lambda^2}$)

2 — 2 Bestimmen Sie mit Hilfe des Ergebnisses von Teilaufgabe 1 die Koordinaten des Fußpunk-
tes L des Lotes vom Punkt A auf die Gerade g.

4 — 3 Die Punkte A und L(–1; 0; 1) liegen symmetrisch bezüglich der Ebene E.
Bestimmen Sie für diese Ebene eine Gleichung in Koordinatenform.
(Mögliches Ergebnis: E: $x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 6 = 0$)

5 — 4 Die Schnittpunkte S_1, S_2 und S_3 der Ebene E mit den Koordinatenachsen bestimmen die
Grundfläche einer Pyramide mit dem Koordinatenursprung O als Spitze.
Berechnen Sie die Maßzahlen von Höhe und Volumen der Pyramide $OS_1S_2S_3$.

Gegeben sind ferner die Ebenen F_a: $ax_1 + 2ax_2 + (a-3)x_3 + 3 = 0$ mit $a \in \mathbb{R}$.

2 — 5 Weisen Sie nach, dass die Gerade g in jeder Ebene F_a enthalten ist.

5 6 Für welchen Wert von a verläuft die zugehörige Ebene F_a parallel zur Ebene E? Ermitteln Sie für diesen Wert von a den Abstand der betreffenden Ebene F_a von der Ebene E.

6 7 Berechnen Sie nun a so, dass die zugehörige Ebene F_a die Ebene E senkrecht schneidet, und ermitteln Sie für diesen Fall eine Gleichung der Schnittgeraden s der beiden Ebenen.

7 8 Nun wird die Menge der Normalenvektoren $\vec{n}_{F_a} = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ a-3 \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$ der Ebenen F_a betrachtet. Zeigen Sie, dass jeder Vektor $\vec{n}_{F_a}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{n}_{F_1}$ (a = 1) und $\vec{n}_{F_{-2}}$ (a = –2) dargestellt werden kann. Interpretieren Sie diesen Sachverhalt geometrisch.

—

Weisen Sie ferner nach, dass der Summenvektor zweier beliebiger Vektoren aus der Menge der Normalenvektoren $\vec{n}_{F_a}$ nicht zu dieser Menge gehört.

34

BE In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind der Punkt B(2; –1; 2), die Punktmenge $C_k(4; 3; k)$ mit $k \in \mathbb{R}$ sowie die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ gegeben.

1.0 Die Gerade g und der Punkt B bestimmen eine Ebene E.

3 1.1 Bestimmen Sie je eine Gleichung der Ebene E in Parameter- und Koordinatenform.
(Mögliches Teilergebnis: $E: -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2 = 0$)

4 1.2 Berechnen Sie den Abstand des Punktes B von der Geraden g.

5 1.3 Eine der Geraden durch die Punkte B und C_k schneidet die Gerade g.
Ermitteln Sie rechnerisch für diesen Fall den Wert des Parameters k.

2.0 Die Punkte C_k sind Spiegelpunkte des Punktes B bezüglich der Ebenen F_k.

4 2.1 Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Ebenen F_k in Koordinatenform.
(Mögliches Ergebnis: $F_k: 2x_1 + 4x_2 + (k-2)x_3 - 8 - 0{,}5k^2 = 0$)

2 2.2 Für welches $k \in \mathbb{R}$ verläuft die zugehörige Ebene F_k parallel zur x_3-Achse?
Geben Sie eine Gleichung dieser Ebene an.

6 | 2.3 Berechnen Sie nun diejenigen Werte von $k \in \mathbb{R}$, für die die zugehörige Ebene F_k die x_2-Achse unter einem Winkel von 30^o schneidet.

3.0 Die Betrachtung des Schnittproblems der Ebenen E, F_2 und einer weiteren Ebene H führt auf ein lineares Gleichungssystem der Form

$$\begin{array}{lll} (1) & E: & -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ (2) & F_2: & 2x_1 + 4x_2 = 10 \\ (3) & H: & -5x_1 + 2x_2 + 9x_3 = -4 \end{array}$$

4 | 3.1 Untersuchen Sie mit Hilfe des Ranges der Koeffizientenmatrix und der erweiterten Koeffizientenmatrix, wie viele Lösungen dieses Gleichungssystem besitzt.

6 | 3.2 Ermitteln Sie die Menge aller Lösungen des Gleichungssystems in vektorieller Form und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

34

1 Ein Fensterhersteller lädt seine Stammkunden zur Hausmesse mit Präsentation einer neuen Haustüre ein, die eine einbruchhemmende Wirkung hat. Ausgehend von den Erfahrungen bei früheren Aktionen rechnet er damit, dass ein Stammkunde mit einer Wahrscheinlichkeit von 30% einer solchen Einladung nachkommt und durchschnittlich jeder zweite Teilnehmer noch auf der Messe neue Haustüren bestellt. Die nicht teilnehmenden Stammkunden erhalten eine schriftliche Produktinformation. Weiter geht er davon aus, dass nach der gesamten Aktion von 20% der Stammkunden Bestellungen für neue Haustüren vorliegen.
Gegeben sind die Ereignisse: H: „Stammkunde besucht die Hausmesse“

B: „Stammkunde bestellt neue Haustüren“

1.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit,

a) dass ein Stammkunde zur Hausmesse kommt und dort neue Haustüren bestellt,

b) dass ein Stammkunde nicht zur Hausmesse kommt und nur mithilfe der Produktinformation bestellt,

c) dass ein Kunde weder zur Hausmesse kommt, noch eine Bestellung aufgibt. (6 BE)

1.2 Überprüfen Sie, ob die Ereignisse H und B stochastisch unabhängig sind. (2 BE)

1.3 Berechnen Sie $P_{\overline{H}}(B)$, und beschreiben Sie die Bedeutung dieser Wahrscheinlichkeit in Worten. (3 BE)

1.4 Die Stammkunden, die nicht reagieren, werden von Außendienstmitarbeitern besucht. Herr Kneter erzielt bei einem Besuch mit einer Wahrscheinlichkeit von 30% einen Geschäftsabschluss. Er behauptet, sein Kollege Topseller sei ein ebenso guter Verkäufer wie er selbst (Nullhypothese), wohingegen Topseller behauptet, der bessere Verkäufer zu sein (Gegenhypothese). In einem Test besucht Topseller 210 Kunden.

1.4.1 Legen Sie für einen Signifikanztest mit einem Signifikanzniveau von 5% die Testgröße fest, formulieren Sie die Hypothesen, und bestimmen Sie den Annahmebereich und den Ablehnungsbereich der Nullhypothese. Wie ist die Behauptung Topsellers zu bewerten, wenn er 74 Geschäftsabschlüsse erzielt? (7 BE)

1.4.2 Berechnen Sie für den Test aus Aufgabe 1.4.1 das Risiko 2.Art, wenn Topseller mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% einen Abschluss erzielt und die Hypothese H_0:p=0,30 bei mindestens 75 Abschlüssen verworfen wird. (4 BE)

1.5 Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der bestellten Türen eines Kunden an. Es ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

Anzahl der bestellten Türen x:	1	2	3	4
P(X=x):	50%	30%	10%	10%

Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von X, und geben Sie die Verteilungsfunktion von X in Tabellenform an. (4 BE)

2 In einer Umfrage werden 600 Wahlberechtigte zufällig ausgewählt und befragt, ob sie jetzt die Partei A wählen würden.

2.1 Bestimmen Sie mit der Ungleichung von Tschebyschow ein möglichst kleines Intervall, in dem bei der Umfrage mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 85% die relative Häufigkeit der A-Wähler liegt, wenn die Wahrscheinlichkeit, in der Gesamtheit der Wähler auf einen A-Wähler zu treffen, 0,25 beträgt. (5 BE)

2.2 Der wirkliche Anteil der Wähler von Partei A sei 20%. Geben Sie mithilfe der allgemeinen Ungleichung von Tschebyschow eine untere Schranke für die Wahrscheinlichkeit P an, sodass bei einer Befragung von 600 zufällig ausgewählten Wahlberechtigten die Anzahl der Wähler von Partei A mehr als 90 aber weniger als 150 beträgt. (5 BE)

2.3 Die Zufallsgröße T gibt die Anzahl der Befragten an, welche die Partei A wählen. Berechnen Sie $P(90 < T < 150)$, wenn 600 Wahlberechtigte befragt werden und man mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% auf einen A-Wähler trifft. Erklären Sie die Abweichung dieses Ergebnisses vom Ergebnis der Aufgabe 2.2 . (4 BE)

BE	
	1.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte A(2; 1; –1), B(4; 0; –1) und C(–2; 4; 0) sowie die Geraden $g_k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2-k \\ k-2 \end{pmatrix}$ mit $\nu \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{R}$ gegeben. Die Punkte A, B und C bestimmen die Ebene E.
3	1.1 Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform. (Mögliches Ergebnis: E: $x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 6 = 0$)
6	1.2 Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Ebene E und der Geraden g_9 (für k = 9) sowie den Schnittwinkel zwischen der Ebene E und der Geraden g_9. (Teilergebnis: S(10; 5; 7))
5	1.3 Untersuchen Sie, für welchen Wert des Parameters k die zugehörige Gerade g_k parallel zur Ebene E verläuft, und berechnen Sie für diesen Fall den Abstand der Geraden g_k von

der

Ebene E.

4 1.4 Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes L, der in der Ebene E liegt und vom Punkt
P(9; 12; 0) der Geraden g_k die kürzeste Entfernung aufweist.

4 1.5 Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden h, die in der Ebene E liegt und die Gerade g_9
aus Teilaufgabe 1.2 senkrecht schneidet.

2.0 Gegeben sind die Matrix A_t und der Vektor $\vec{b}$ durch

$$A_t = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2t & t^2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}.$$

8 2.1 Untersuchen Sie mit Hilfe des Ranges von Koeffizientenmatrix und erweiterter Koeffizientenmatrix, für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ das Gleichungssystem $A_t \cdot \vec{x} = \vec{b}$ keine, eine oder
unendlich viele Lösungen besitzt.

4 2.2 Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems $A_1 \cdot \vec{x} = \vec{b}$ (für t = 1).

34

BE 1.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind für $a \in \mathbb{R}$ die Punkte P_a (a; a+1; 1) und die Gerade g gegeben:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ wobei } \mu \in \mathbb{R} \text{ gilt.}$$

2 1.1 Geben Sie mit Begründung die Koordinatenebene an, in der keiner der Punkte P_a liegt.

3 1.2 Zeigen Sie, dass keiner der Punkte P_a auf der Geraden g liegt.

3 1.3 Zeigen Sie, dass für alle $a \in \mathbb{R}$ die Punkte P_a auf einer Geraden h liegen, und geben Sie eine Gleichung für h an.

3 1.4 Bestimmen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und h. Begründen Sie Ihre Antwort.

3 1.5 Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene H in Normalenform, die die Gerade g enthält und parallel zu h verläuft.
(mögliches Ergebnis: H : $-x_1 + x_2 + x_3 + 1 = 0$)

8 1.6 Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden □, die senkrecht zur Ebene H verläuft und beide Geraden g und h schneidet.
Beschreiben Sie auch die besondere Lage von □ bezüglich der Geraden g und h.

2 1.7 Berechnen Sie den Abstand der Geraden g und h.

2.0 Vier chemische Produkte P_1, P_2, P_3 und P_4 werden aus vier Grundsubstanzen A, B, C und D durch Mischung nach folgender Tabelle hergestellt:

Produkt	dafür benötigte Einheiten der Grundsubstanz			
	A	B	C	D
P_1	2	0	1	2
P_2	1	3	2	2
P_3	0	3	2	0
P_4	1	2	1	0

10 2.1 Berechnen Sie die Anzahl der jeweiligen Produkte P_1, P_2, P_3 und P_4, die ohne Rest aus einem Lagerbestand von 12 Einheiten von A, 17 Einheiten von B, 15 Einheiten von C und 14 Einheiten von D gemischt werden können.
Hinweis: Stellen Sie jedes Produkt als Vektor des $\mathbb{R}^4$ dar.

34

Index