Übungen 8B / März 2002

1) Gegeben sind die Punkte A(4/3/-2), B(2/2/0) und C(4/0/1) sowie die Gerade g: $X = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Die Ebene ε enthält die Punkte A, B und C. Gib eine Gleichung für ε an. Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes P von ε mit g.

b) Zeige, daß das Dreieck ABC gleichschenkelig und rechtwinkelig ist. Der Punkt D bildet mit A, B und C ein Quadrat. Bestimme die Koordinaten von D. Zeige, daß P der Mittelpunkt dieses Quadrates ist.

c) Berechne das Volumen des Tetraeders ABCS mit S(5/4/1).

d) Eine Kugel berührt die Ebene ε in A und geht durch Q(7/6/2). Bestimme den Radius und den Mittelpunkt dieser Kugel. Gib die Gleichung dieser Kugel an.

[**Lösungen:** a) ε: x + 2y + 2z = 6 P(4/1,5/-0,5) b) AB = BC = 3 D(6/1/-1) c) V = 4,5 d) $(x-5)^2 + (y-5)^2 + z^2 = 9$]

2) Das Dreieck ABC [A(1/2/3), B(5/-2/1), C(3/6/-1)] ist Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide ABCS, deren Mantelkanten AS, BS und CS gleich lang sind. Die Höhe beträgt 6.

a) Berechne eine Spitze der Pyramide.

b) Berechne das Volumen der Pyramide und den Winkel der Seitenkanten zur Basisebene.

c) Berechne die Gleichung der Umkugel der Pyramide.

[**Lösungen:** a) M(4/2/0) S(8/4/4) b) V = 36 c) $(x-5)^2 + (y-2,5)^2 + (z-1)^2 = 20,25$]

3) Ein Kreis k hat den Mittelpunkt M(7/0) und den Radius $r = 5 \cdot \sqrt{5}$.

a) Bestimme die Gleichungen der Kreistangenten t_1 und t_2, welche parallel zur Geraden g: 2x + y = 8 verlaufen. Bestimme ferner die Gleichung der Tangente t_3, die den Kreis in T(9/y>0) berührt.

b) Die Tangente t_3 schneidet t_1 im Punkt S_1 und t_2 im Punkt S_2. Zeige, daß gilt: $\angle S_1MS_2 = 90°$.

[**Lösungen:** a) t_1: $X = \begin{pmatrix} 17 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ t_2: $X = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ t_3: $X = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) S_1 (14,5/10) S_2 (-13/15)

4) Gegeben sind die Punkte A(-1/-2) und B(8/1). Die Strecke AB soll in drei gleich große Teile unterteilt werden. Im dem Punkt A nächsten Teilungspunkt soll eine Normale auf g_{AB} errichtet werden. Auf dieser Normalen liege im Abstand $\sqrt{62,5}$ cm der Punkt C (im 4. Quadranten).

a) Bestimme C durch Konstruktion und Rechnung.

b) Im Dreieck ABC soll der Umkreismittelpunkt U durch Konstruktion und durch Rechnung bestimmt werden.

c) Begründe exakt, warum der so gefundene Punkt U Umkreismittelpunkt ist.

d) Berechne den Flächeninhalt des Umkreises.

e) Berechne den Winkel α = BAC und miß ihn zum Vergleich auch aus der Zeichnung ab.

[**Lösungen:** a) C(4,5/-8,5) b) U(4,35/-3,05) d) A = 93,38 cm^2 e) 68,2°]

5) Von einer Hyperbel sind die Asymptoten $y = \pm \frac{3}{4} x$ und die lineare Exzentrizität e = 5 bekannt.

a) Wie lautet die Gleichung der Hyperbel?

b) t: 5x + 4y = c ist Tangente an die Hyperbel. Berechne c und den Berührpunkt T (nur eine der beiden Lösungen).

c) Zeige: T halbiert das zwischen den Asymptoten liegende Tangentenstück.

d) Zeige: das von der Tangente und den Asymptoten begrenzte Dreieck hat den Flächeninhalt A = ab.

[**Lösungen:** a) $9x^2 - 16y^2 = 144$ b) t_{12}: $y = -\frac{5}{4} x \pm 4$ T_{12} (± 5/ $\mp \frac{9}{4}$) c) $TU = TV = \frac{3 \cdot \sqrt{41}}{4}$ d) A = 12]

6) Gegeben sind der Kreis k: $(x - 7)^2 + y^2 = 25$ und die Parabel par: $y^2 = 4x$.

a) Konstruiere beide Kegelschnitte.

b) Berechne ihre Schnittpunkte.

c) Die beiden (verschiedenen) von den Kurven eingeschlossenen endlichen Flächenstücke rotieren um die x-Achse. Mit Hilfe der Integralrechnung sind die Volumina beider Drehkörper zu berechnen. In welchem Verhältnis stehen sie?

[**Lösungen:** b) S_{12} (4/±4) S_{34} (6/$\pm 2 \cdot \sqrt{6}$) c) $V_1 = \frac{44\pi}{3}$ $V_2 = \frac{4\pi}{3}$ $V_1 : V_2 = 11 : 1$]

7) Ermittle die Gleichung des Umkreises des Dreiecks ABC [A(4/-12), B(-2/6), C(-12/-4)], gib die Gleichung der Tangente t im Punkt A an und zeige, daß sich der Inhalt des gegebenen Dreiecks zum Inhalt des Dreiecks 0YX, das t mit den Koordinatenachsen begrenzt, wie 4 : 5 verhält.

Berechne weiters die Gleichung des Inkreises des Dreiecks 0YX und gib das Verhältnis der beiden Kreisinhalte an.

[**Lösungen:** k_u: $(x+2)^2 + (y+4)^2 = 100$ t_A: $y = \frac{3}{4}x - 15$ Y(0/-15) X(20/0) $A_{ABC} = 120$ $A_{0YX} = 150$ $A_{ABC} : A_{0YX} = 4 : 5$

8) Gegeben ist das Dreieck ABC [A(-8/0), B(2/2), C(2/-10)].

a) Ermittle die Gleichung des Kreises k durch die Seitenmittelpunkte M_{AB}, M_{AC}, M_{BC}.

b) Auf diesem Kreis k liegen weitere sechs Punkte, und zwar die Höhenfußpunkte F_a, F_b, F_c des Dreiecks ABC und die Streckenmittelpunkte P_a, P_b, P_c, die man erhält, wenn man den Höhenschnittpunkt H des Dreiecks ABC mit den einzelnen Eckpunkten verbindet und die so erhaltenen Strecken halbiert.
Zeige diesen Sachverhalt für die Punkte F_a und P_a (große Skizze).

[**Lösungen:** a) $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 13$ b) F_a (2/0) P_a (-4/0)]

9) Eine regelmäßige quadratische Pyramide hat die Grundfläche A(0/15/-15), B, C(0/-15/15), D und die Spitze S(12/24/z_S). Ermittle die fehlenden Koordinaten der Eckpunkte, die Längen der Grundkante a, der Körperhöhe h, der Mantelflächenhöhe h_a sowie Volumen und Oberfläche der Pyramide.

[**Lösungen:** S(12/24/24) B(20/-5/-5) D(-20/5/5) a = 30 h = 36 h_a = 39 V = 10 800 O = 3 240]

10) Die Ellipse ell: $x^2 + 5y^2 = 70$ wird von der Parabel par: $y^2 = 2px$ in P(5, y>0) geschnitten.

a) Berechne die Gleichungen der Parabel sowie den Schnittwinkel! [par: $y^2 = {}^{9}/_{5}\,x$, α=49,39°]

b) Berechne das Volumen jenes Körpers, der entsteht, wenn das von den Kurven und der positiven x-Achse begrenzte Flächenstück um die x-Achse rotiert! [V=122,275 Volumseinheiten]

11) Die Ellipse ell: $x^2 + 8y^2 = 48$ wird in P(4, y>0) von einem Kreis rechtwinklig geschnitten. Der Mittelpunkt des Kreises liegt auf der y-Achse.

a) Bestimme die Gleichung eines solchen Kreises!

b) Berechne das Volumen des Drehkörpers, der entsteht, wenn das gemeinsame Flächenstück von Kreis und Ellipse um die positive y-Achse rotiert!

12) Die Ellipse ell: $3x^2 + 9y^2 = 36$ wird in P(3, y>0) von einem Kreis rechtwinklig geschnitten. Der Mittelpunkt des Kreises liegt auf der y-Achse.

c) Bestimme die Gleichung eines solchen Kreises! [M(0,4) r=$\sqrt{18}$]

d) Berechne das Volumen des Drehkörpers, der entsteht, wenn das gemeinsame Flächenstück von Kreis und Ellipse um die positive y-Achse rotiert!

Lösung zu 5): Graphische Veranschaulichung