1) Der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades hat den Wendepunkt W(0/9) und bei x = 6 eine Nullstelle. Die Steigung an der Stelle x = 2 ist $\frac{1}{2}$.

a) Ermittle den Funktionsterm von f.

b) Diskutiere f (Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte, Monotonie und Krümmung) und zeichne den Graphen im Intervall [-4;7].

c) Berechne den Inhalt jener Fläche, die von f und der Normalen auf f im Punkt W(0/9) im 1. Quadranten begrenzt wird.

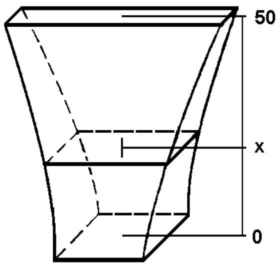
[**Lösungen:** $f(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{2}x + 9$ N(6/0) T(-2,45/6,55) H(2,45/11,45) W(0/9) n: $y = -\frac{2}{3}x + 9$ A = 14,083]

2) Eine Vase hat innen die Form eines einschaligen Hyperboloids (kleinster innerer Durchmesser 6 cm, Höhe 5 cm, größter Durchmesser $6 \cdot \sqrt{2}$ cm); sie ist mit Wasser gefüllt. Der Inhalt der Vase wird restlos in ein Gefäß gegossen, dessen Innenraum ein Rotationsparaboloid ist (größter Durchmesser $6 \cdot \sqrt{8}$ cm, Höhe 18 cm). Wie hoch steht das Wasser?

[**Lösungen:** a) hyp: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$ par: $x^2 = 4y$ h = 5,477 cm]

3) Eine Betonplastik ist 50 cm hoch und hat in jeder Höhe eine annähernd rechteckige horizontale Schnittfläche. Die Breite der Plastik (und damit eine Seitenlänge der Schnittfläche) ist in einer Höhe von x Meter über der Grundfläche durch $b(x) = \frac{1}{6} \cdot (x^2 - 3x + 24)$ (in cm) gegeben. Die Dicke der Plastik (und somit die zweite Seitenlänge der horizontalen Schnittfläche) nimmt von 12 cm an der tiefsten Stelle (x = 0) bis zu 2 cm an der höchsten Stelle (x = 50) linear ab.

Berechne die Masse der Betonplastik in kg (Dichte von Beton ρ = 2,4 kg/dm^3).



[**Lösungen:** V = 29 317 cm^3 m = 70,36 kg, Tipp: Man bilde zunächst $l(x)=12-\frac{1}{5}x$ als Funktion der Länge sowie A(x) = b(x) · l(x) und integriere diese Querschnittsflächenfunktion im Intervall von 0 bis 50]

4) Ein Eignungstest enthält 300 Fragen. Zu jeder dieser Fragen sind drei Antworten möglich, von denen jeweils nur eine richtig ist. Es wird angenommen, daß der Kandidat die Antwort auf gut Glück rät.

a) Man betrachte zunächst nur die ersten 5 Fragen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Kandidat davon mehr richtig als falsch beantwortet?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden von allen 300 Fragen mindestens 120 richtig beantwortet?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß von allen Fragen mindestens 75 und höchstens 110 beantwortet werden?

[**Lösungen:** a) 0,21 b) 0,007 c) 0,901]

5) Gegeben sind die Funktionen $f(x) = a - \frac{x^2}{a}$ und $g(x) = a^3 - ax^2$ mit a > 0 und a ≠ 1.

a) Bestimmen Sie ihre Schnittpunkte.

b) Bestimmen Sie a so, daß die in diesen Punkten an die Funktion g(x) gelegten Tangenten aufeinander senkrecht stehen.

c) Für welches a < 1 erreicht das von den Kurven begrenzte und oberhalb der x-Achse liegende Flächenstück maximalen Inhalt?

[**Lösungen:** a) S_{12} (±a/0) b) $a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$]

6) Gegeben: Kreis k: $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 20$, Gerade g: $X = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$.

a) Berechne die Schnittpunkte A und B von Kreis und Gerade, die Länge der Sehne AB und den Flächeninhalt des Dreiecks ABM, wobei M der Mittelpunkt des Kreises ist.

b) Bestimme die Gleichung eines zweiten Kreises k_2, aus dem die Gerade ebenfalls die Sehne AB abschneidet und der durch den Punkt C(18/12) verläuft.

c) Berechne weiters den Schnittwinkel der beiden Kreise.

[**Lösungen:** a) A(6/-4) B(5/3) AB = $\sqrt{50}$ A = $\frac{25}{2}$ b) k_2: $(x-16)^2 + (y-1)^2 = 125$ c) 63,43°]

7) Gegeben ist die Funktion f: $y = (ax + b)\cdot e^{-x}$.

a) Bestimme die Koeffizienten der Funktion so, daß die Kurve im Punkt P(0/2) eine waagrechte Tangente besitzt.

b) Berechne die Nullstelle, die lokale Extremstelle und den Wendepunkt der Funktion f: $y = 2\cdot(x + 1)\cdot e^{-x}$. Berechne ferner die Fläche, die von der Kurve, der negativen x-Achse und der positiven y-Achse eingeschlossen wird.

c) Erläutere den Kurvenverlauf im Intervall [-2;4] mittels der Begriffe Monotonie und Krümmungsverhalten und erkläre die besondere Bedeutung der oben berechneten Stellen.

[**Lösungen:** a) $y = 2\cdot(x+1)\cdot e^{-x}$ b) N(-1/0) H(0/2) W(1/1,47) A = 1,44]

8) Eine Funktion f(x) hat die zweite Ableitung $f''(x) = \frac{3}{4}x - 3$. Die Funktion geht durch den Punkt A(4/6) und hat in A die Steigung $-\frac{3}{2}$.

a) Bestimme die Funktionsgleichung.

b) Bestimme die Koordinaten des Schnittpunktes B mit der y-Achse, des Hochpunktes H, des Tiefpunktes T und des Wendepunktes W. Stelle weiters die Wendetangente auf und zeichne die Kurve in [-1;8].

c) Berechne den Flächeninhalt, der von der Funktion und der Sehne durch die Punkte B und W eingeschlossen wird.

[**Lösungen:** a) $f(x) = \frac{1}{8}\cdot(x^3 - 12x^2 + 36x + 32)$ b) B(0/4) H(2/8) T(6/4) W(4/6) t_W: $y = -\frac{3}{2}x + 12$ c) A = 8]

9) Gegeben ist eine Hyperbel $x^2 - 4y^2 = 80$.

a) Zeige, daß die Tangente im Punkt P(12/4) eine Winkelsymmetrale der beiden Geraden PF_1 und PF_2 ist.

b) Berechne die Punkte der Hyperbel, für die die Strecke XF_1 normal zur Strecke XF_2 ist.

c) Das Flächenstück, das von der x-Achse, der Tangente in P und vom rechten Hyperbelast begrenzt wird, rotiert um die x-Achse. Berechne das Volumen des entstehenden Drehkörpers.

[**Lösungen:** a) t: 3x - 4y = 20 b) X_{1234} $(\pm 4\cdot\sqrt{6} / \pm 2)$ c) V_x = 16,297]