Übungen zu Kegelschnitten

Beispiele zum Kreis:

K1)Ermittle die Gleichungen der folgenden Kreise:

a) M(3/2), r = 5 b) M(-2/4), r = 3 c) M(3/-1), r = √10 d) M(-2/-2), P(5/1) ∈ k

e) M(5/10), P(3/7) ∈ k f) M(4/2), k berührt y-Achse g) M(5/-3), k berührt x-Achse

h) M(-3/-4), O(0/0) ∈ k

[a) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$ b) $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 9$ c) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 10$

d) $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 58$ e) $(x - 5)^2 + (y - 10)^2 = 13$ f) $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 16$

g) $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 9$ h) $(x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$]

K2) Berechne Mittelpunkt und Radius der folgenden Kreise:

a) k: $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 4 = 0$ b) k: $x^2 + y^2 - 10x + 6y - 2 = 0$ c) k: $x^2 + y^2 + 10x - 2y - 10 = 0$

d) k: $x^2 + y^2 + 6x - 16 = 0$ e) k: $x^2 + y^2 - 12y + 20 = 0$ f) k: $3x^2 + 3y^2 - 60y + 57 = 0$

g) k: $x^2 + y^2 - 5x + 10y = 0$ h) k: $x^2 + y^2 - 3x - 5y - 4 = 0$

[a) [M(2/4), r = 4 b) M(5/-3), r = 6 c) M(-5/1), r = 6 d) M(-3/0), r = 5 e) M(0/6), r = 4

f) M(0/10), r = 9 g) M(2,5 / -5), r = √31,25 h) M(1,5 / 2,5), r = √12,5]

K3) Ermittle die Gleichung der Tangente an den Kreis k im Punkt T!

a) k: $x^2 + y^2 = 10$, T(1/y>0) b) k: $x^2 + y^2 = 20$, T(x<0/2) c) k: $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 25$, T(5/y>0)

d) k: $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 36$, T(x>0/4) e) M(5/-3), T(4/4) f) M(-6/3), T(0/0)

g) k: $x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$, T(0/y<0) h) k: $x^2 + y^2 - x - 2y = 41$, T(3/7)

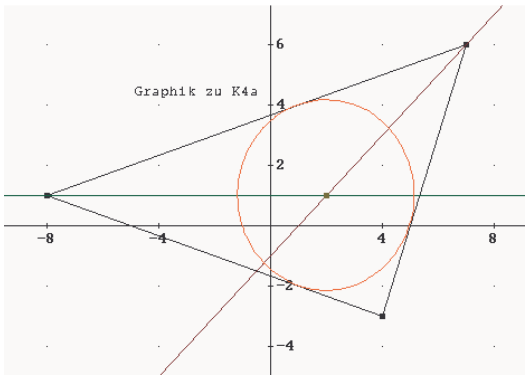
[a) x + 3y = 10 b) -2x + y = 10 c) 3x + 4y = 39 d) x = 5

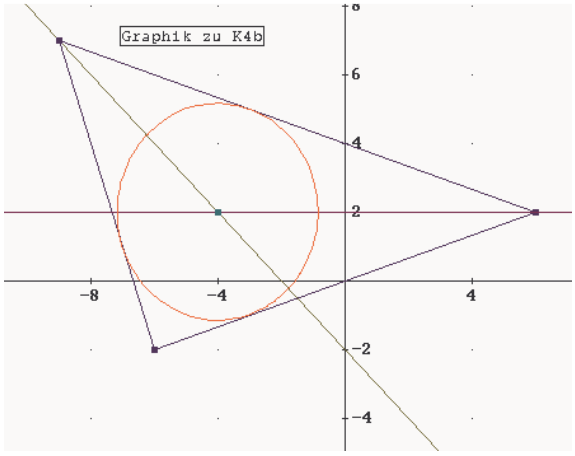
e) -x + 7y = 24 f) 2x - y = 0 g) 3x + 4y = -16 h) 5x + 12y = 99]

K4) Bestimme für das Dreieck ABC die Gleichung des Inkreises!

a) A(7, 6), B(-8, 1), C(4, -3) [I(2, 1), r=√10]

b) A(6, 2), B(-9, 7), C(-6, -2) [I(-4, 2), r=√10]





K5) k: $x^2 + y^2 -20x-13y+61=0$ g: 12x + 5y = 16 h: 4x + 3y =32

Bestimme jene Punkte des Kreises k, die von den Geraden g und h denselben Normalabstand haben! (Diese Punkte liegen auf der Winkelsymmetrale von g und h!)

[P(1, -6), Q(5, -1)]

K6) k: $X^2 = 325$ g: x - 5y = 39

Zur Geraden g sind im Abstand √26 parallele Gerade gelegt. bestimme ihre Schnittpunkte mit dem Kreis!

[P(18, 1), Q(-17, -6) R(15, -10), S(-10, -15)]

K7) Dem Kreis k: $x^2 + y^2 -6x +4y -12 =0$ ist ein Quadrat zu umschreiben, bei dem 2 Seiten parallel zur Geraden

g: 3x - 4y +13 = 0 liegen. Bestimme die Gleichungen der Quadratseiten sowie die Eckpunkte des Quadrats!

[A(-4, -1), B(2, -9), C(10, -3) D(4, 5)]

K8) Untersuche , ob der Kreis k die Gerade g berührt (ohne bzw. mit Berührbedingung)!

$x^2 + y^2 = 25$ g: X = (5, 10) + t (4, 3) [T (-3, 4)]

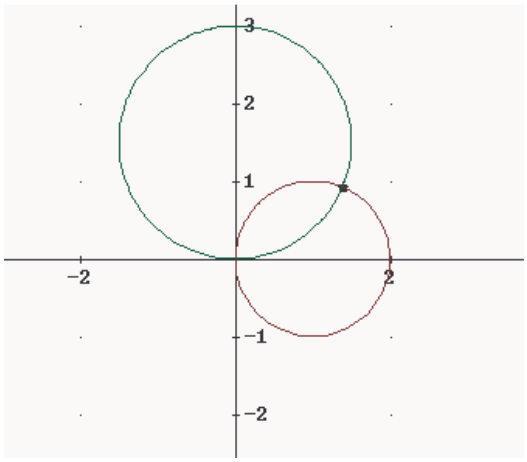
K9) An den Kreis k sind jene Tangenten zu legen, die zu g normal sind! Bestimme ihre Berührpunkte!

k:$4X^2 = 125$ g: $2x - y = 4$ [T_1 (5/2, 5), T_2 (-5/2, -5)]
K10) Bestimme die Gleichung eines Kreise, der durch A(-4, 0) B(4, 0) geht und die Gerade g: $3x - 4y = -20$ berührt! [M_1 (0, 0) M_2 (0,-160/9)]
K11) Berechne Schnittpunkte und Schnittwinkel von Kreis und Gerade!
a) k: $x^2 + y^2 = 50$, g: $y = 3x + 10$ b) k: $x^2 + y^2 = 25$, g: $x - 2y = -5$ c) k: $x^2 + y^2 = 50$, g: X = (-3/4) + t·(4/3)
d) k: $x^2 + y^2 - 10y + 5 = 0$, g: $y = 3x - 5$ e) k: $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 4 = 0$, g: $2x + 3y = 8$
f) k: $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$, g: X = (1/5) + t·(3/1) g) k: M(-2/4), r = √10; g: X = (0/3) + t·(1/2)
h) k: M(7/-1), r = 3√2; g: P(6/0), Q(2/4)
[a) S_1(-5/-5), S_2(-1/7), α = 63,4° b) S_1(-5/0), S_2(3/4), α = 63,4° c) S_1(-7/1), S_2(1/7), α = 45°
d) S_1(2/1), S_2(4/7), α = 45° e) $S_{1,2}$(-2/4), α = 0°(Tangente) f) S_1(-2/4), S_2(7/7), α = 71,6°
g) S_1(-1/1), S_2(1/5), α = 45° h) S_1(4/2), S_2(10/-4), α = 90°]
K12) Bestimme die Schnittpunkte von k und g, die Länge der Sehne S_1S_2 , den Abstand des Mittelpunkts von der Sehne!
a) k: M(2, -5) r =√65 g: $2x + 3y = 2$ [S_1(-2, 2) S_2(10, -6) S_1S_2 = 4 √13, d=√13]
b) k: $x^2 + y^2 -5x + 8y = 134$ g: $-3x + 4y = 14$
[S_1(-10, -4) S_2(6, 8) S_1S_2 = 20, d=7,5]
K13) Bestimme die Gleichungen der zu g parallelen Tangenten an den Kreis auf 2 Arten!
a) k: $x^2 + y^2 - 10x - 4y = 23$ g: $3x + 2y = 10$ [$3x + 2y = -7$ bzw. 45]
b) k: M(7, 4) r=6 g: $3x - 4y = 54$ [$3x - 4y = -25$ bzw. 35]
K14) Bestimme die Gleichungen der zu g parallelen Tangenten an den Kreis auf 2 Arten! Bestimme auch die Koordinaten der Berührpunkte!
a) $x^2 + y^2 = 90$ g: X=(-4, 3) + t (1, 3) [$y = 3x+30$ bzw. $Y=3x - 30$, T_1(-9, 3) T_2(9, -3)]
b) $x^2 + y^2 = 20$ g: $11x - 2y = 13$ [$y = {}^{11}/_2x +25$ bzw. $Y= {}^{11}/_2x -25$, T_1(- $^{22}/_5$, $^4/_5$) T_2($^{22}/_5$, -$^4{}_5$)]
K15) Bestimme die Gleichungen der zu g normalen Tangenten an den Kreis auf 2 Arten!
a) k: $x^2 + y^2 = 20$ g: $4x - 2y = 5$ [$x + 2y = -10$ bzw. 10]
b) k: M(-2, -5) r=√5 g: X=(7, 3) + t (1, 2) [$x + 2y = -17$ bzw. $X + 2y = -7$]
K16) Bestimme die gegenseitige Lage von k und g!
a) $x^2 + y^2 =25$ g: X = (5, 10) + t (4, 3) [T(-3, 4)]
b) $x^2 + y^2 =10$ g: $x - 3y = -10$ [T(-1, 3)]
K17) Bestimme den Schnittwinkel von k und g!
k: $(x-5)^2 + (y-8)^2 = 125$ g: $2x - y = 17$ [53,13°]
K18) Werden zwei parallele Tangenten t_1 und t_2 von einer dritten Kreistangente geschnitten, so gilt für die Schnittpunkte S_1 und S_2 dieser Tangenten: Das Dreieck S_1MS_2 ist rechtwinklig. Zeige die Richtigkeit dieses Satzes für den Kreis
k: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 20$, wobei t_1 und t_2 normal auf g: $2x – y = 4$ stehen sollen und t_3 den Kreis in T(x>0, 4) berührt!
[S_1($^{13}/_3$, $^{16}/_3$), S_2(11, -8)]
K19) Von P sind an den Kreis k Tangenten zu legen. bestimme die Gleichungen der Tangenten, die Berührpunkte sowie den Flächeninhalt des Dreiecks PT_1T_2!
a) P(2, 14) k: $x^2 + y^2 = 100$ [T_1(-6, 8), T_2(8, 6)]
b) P(4, 7) k: $x^2 + y^2 = 45$ [T_1(6, 3), T_2(-6/13, 81/13)]
c) P(7, 3) k: $x^2 + y^2 = 29$ [T_1(2, 5), T_2(5, -2)]
K20) Unter welchem Winkel schneiden einander die Kreise
k_1: $x^2 + y^2 = 25$ und k_2: $(x-7)^2 + y^2 = 32$ [81°52' bzw. 98,13°]
K21) Berechne Schnittpunkte und Schnittwinkel der beiden Kreise!
a) k_1: $x^2 + y^2 = 25$, k_2: $(x - 7)^2 + y^2 = 32$ b) k_1: $x^2 + y^2 = 16$, k_2: $x^2 + (y - 5)^2 = 9$
c) k_1: M_1(6/0), r_1 = 15; k_2: M_2(-8/0), r_2 = 13 d) (*) k_1: M_1(0/0), r_1 = √40 ; k_2: M_2(6/6), r_2 = 4
a) [$S_{1,2}$(3/±4), α = 81,9° b) $S_{1,2}$(±2,4/3,2), α = 90° c) $S_{1,2}$(-3/±12), α = 59,5° d) S_1(2/6), S_2(6/2), α = 71,6°]
K22) Ermittle die Gleichung des Kreises mit dem Mittelpunkt M(1/5), der durch den Punkt P(5/3) geht!
[k: $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 20$ bzw. $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 6 = 0$]
K23) Ein Kreis hat die allgemeine Gleichung k: $x^2 + y^2 - 6x + 4y = 12$

Bestimme Mittelpunkt und Radius!
[M(3/-2), r = 5]
K24) Gegeben ist der Kreis k: $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 10$ und die Gerade g: $x - 2y = -7$

a) Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte S_1, S_2 von k und g.
b) Bestimme die Gleichungen der Tangenten in S_1 und S_2 sowie den Schnittpunkt der Tangenten.
c) Unter welchem Winkel schneiden einander k und g?

[a) $S_1(-1/3)$, $S_2(3/5)$ b) t_1: $3x - y = -6$, t_2: $x + 3y = 18$, S(0/6), α = 45°]
K25) Zeige: Die Kreise k_1: $x^2 + y^2 = ax$ und k_2: $x^2 + y^2 = by$ schneiden einander rechtwinklig, unabhängig von a oder b!
[Anleitung: Für zwei Kreise, die einander rechtwinklig schneiden, muss gelten: Die Tangente des einen Kreises ist gleichzeitig die Normale auf die Tangente des zweiten Kreises und umgekehrt. Folglich müssen beide Tangenten durch den Mittelpunkt des jeweils anderen Kreises gehen. Da man k_1 und k_2 nicht direkt schneiden kann, bietet sich die Lösung über die Tangenteneigenschaft an. Die Tangente an t_1 erhält man, indem man von $M_2(0, {}^b/_2)$ aus an k_1 die Tangente legt. Diese Gerade hat die Gleichung y=kx+d, wobei d= ${}^b/_2$ gilt. Für k berechnet man: $k = \frac{a^2 - b^2}{2ab}$, die Tangente lautet somit: t_1: $y = \frac{a^2 - b^2}{2ab} \cdot x + \frac{b}{2}$. Die Tangente an k_2 erhält man, indem man von $M_1({}^a/_2, 0)$ aus an k_2 die Tangente legt. Durch Einsetzen des Punktes in die allgemeine Form y = kx + d und Anwenden der Berührbedingung erhält man als Tangentengleichung t_2: $y = \frac{-2ab}{a^2 - b^2} \cdot x + \frac{a^2 b}{a^2 - b^2}$. Da das Skalarprodukt der Normalvektoren der beiden Tangenten in jedem Fall 0 liefert, stehen sie aufeinander normal, die beiden Kreise schneiden einander also rechtwinklig! Als Zusatzaufgabe kann man den Schnittpunkt der beiden Tangenten und damit gleichzeitig der beiden Kreise berechnen. Man erhält: $S\left(\frac{ab^2}{a^2 + b^2}, \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}\right)$. Die nebenstehende Graphik veranschaulicht die Lage der beiden Kreise für a=2 und b=3.]



K26) Bestimme die gegenseitige Lage der Kreise! Unter welchem Winkel schneiden sie einander?
k_1: $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 100$ k_2: $[X - (-7, -5)]^2 = 25$
[Lösung: Schnittpunkte $S_1(-4, -9)$, $S_2(-28/5, -1/5)$, 90°]

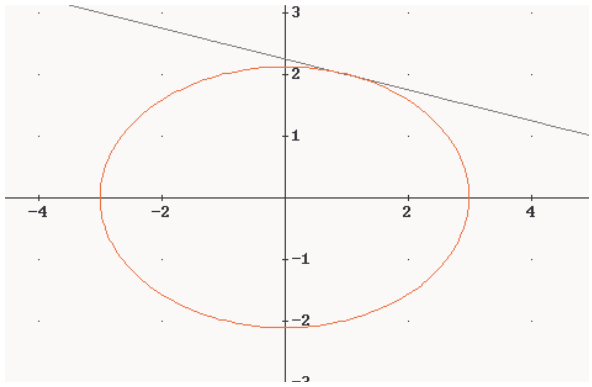
Beispiele zur Kugel:

KK1) Bestimme die Gleichung einer Kugel, die die Ebene E im Punkt P berührt!
a) E: $2x - 5y = -7$ P(4, y, 1) r =√116 [$M_1(8, -7, 1)$, $M_2(0, 13, 1)$]
b) E: $x + y - z = 4$ P(x, 0, 0) r =√27 [$M_1(7, 3, -3)$, $M_2(1, -3, 3)$]
KK2) bestimme die Gleichung einer Kugel, die durch A und B geht und ihren Mittelpunkt auf g hat!
a) A(-4, 3, 4) B(4, 5, -2) g durch P(8, 2, -9) und Q(6, 2, -5) [M(2, 2, 3) r=√38]
b) A(7, 2, -1) B(1, 0, 3) g ist die Schnittgerade von E_1: $-x -y + 3z = -11$ und E_2: $4x - 3y + 2z = -12$ [M(1, 4, -2), r=√41]
KK3) E_1: $2x + 3y - 2z = 18$ und E_2: $3x + 2y + 2z = 31$ sind Tangentialebenen aneine Kugel in den Punkten $T_1(4, y, 1)$ und $T_2(5, 3, z)$. Bestimme die Gleichung der Kugel!
[M(2, 1, 3) r=√17]
KK4) E: $x + 2y - 2z = 18$

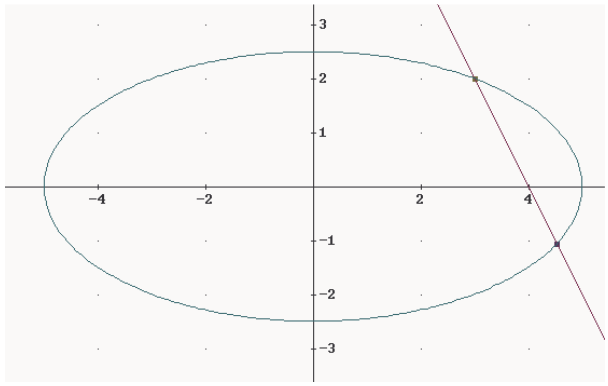
a) Bestimme den Abstand der Ebene vom Ursprung und die Koordinaten des Fußpunktes des Lots vom Ursprung auf die Ebene! [d=6, F(2, 4, -4)
b) Bestimme die Abschnitte, die die Ebene auf den Koordinatenachsen abschneidet!
c) Der Ursprung und die Schnittpunkte der Ebene mit den Achsen bilden eine dreiseitige Pyramide. Berechne ihr Volumen! [V = 243]
d) Für welche Kugel um den Ursprung ist E Tangentialebene?
e) Im Durchstoßpunkt der positiven z- Achse mit der Kugel wird eine weitere Tangentialebene errichtet. Unter welchem Winkel schneiden einander diese beiden Tangentialebenen [48,19°]

Beispiele zu Ellipse, Hyperbel und Parabel:

E1) Eine Ellipse hat die Brennpunkte $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$ und geht durch den Punkt P(3, 4). Ermittle die Gleichung der Ellipse! [$x^2/45 + y^2/20 = 1$ bzw. $4x^2 + 9y^2 = 180$]
E2) Eine Ellipse in 1. Hauptlage hat die Hauptachse 2a = 8 und geht durch den Punkt P(2, -3). Ermittle die Gleichung der Ellipse! [$x^2/16 + y^2/12 = 1$ bzw. $3x^2 + 4y^2 = 48$]
E3) Eine Ellipse hat die Gleichung ell: $9x^2 + 4y^2 = 144$. Berechne a, b und e!
[a = 6, b = 4, e = $2\sqrt{5}$ (2. Hauptlage!, a und b tauschen die Rollen!)]
Ermittle die Gleichung der Tangente an die Ellipse aus Beispiel 1. im Punkt P. Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks, das von der Tangente und den Koordinatenachsen begrenzt wird?
[t: x + 3y = 15, $S_x(15, 0)$, $S_y(0, 5)$ A = 37,5]



E4) Eine Ellipse hat den Brennpunkt $F_1(\sqrt{15}, 0)$ und geht durch P(2, 2). Bestimme die Gleichung der Ellipse!
[$x^2 + 4y^2 = 20$]
E5) Eine Ellipse hat den Brennpunkt $F_1(6 \cdot \sqrt{2}, 0)$ und geht durch P(4, 8). Bestimme die Gleichung der Ellipse!
[$x^2 + 2y^2 = 144$]
E6) Eine Ellipse hat den Brennpunkt $F_1(4 \cdot \sqrt{2}, 0)$ und geht durch P(6, 2). Bestimme die Gleichung der Ellipse!
[$x^2 + 3y^2 = 48$]
E7) Eine Ellipse hat die Gerade g: x+4y=9 als Tangente im Punkt T(1, y). Bestimme die Gleichung der Ellipse!
[$x^2 + 2y^2 = 9$, siehe Graphik]



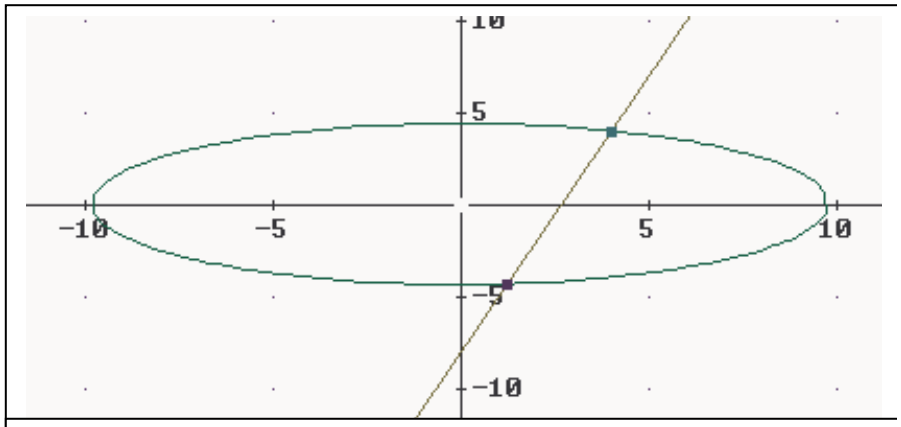
E8) Berechne die Schnittpunkte der Ellipse ell: $x^2 + 4y^2 = 25$ und der Geraden g: 2x + y = 8
[$S_1(\frac{77}{17}, -\frac{18}{17})$, $S_2(3, 2)$, siehe Graphik]
E9) Durch $P(\frac{3}{2}, \sqrt{6})$ verlaufen eine Ellipse mit e=1 und eine Parabel. Bestimme die Gleichungen beider Kurven!
[ell: $8x^2 + 9y^2 = 72$, par: $y^2 = 4x$]
E10) Die Tangenten in den zur y - Achse symmetrischen Punkten $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$ der Hyperbel hyp: $x^2 - y^2 = 1$ schneiden einander im Punkt Q. Für welchen Wert von x_1 wird die Fläche des Dreiecks $P_1 P_2 Q$ minimal! [$x_1 = \pm\sqrt{6} / 2$]
E11) An die Hyperbel hyp: $16x^2 - 9y^2 = 144$ wird im Punkt $P(5, \frac{16}{3})$ die Tangente gelegt. Zeige:
a) Die Tangente schließt mit den beiden Asymptoten ein Dreieck mit dem Flächeninhalt ab ein!
b) Das Stück der Tangente zwischen den Scheiteltangenten wird vom Brennpunkt aus unter rechtem Winkel gesehen!
E12) Unter welchem Winkel schneiden einander die Ellipse ell: $16x^2 + 3y^2 = 64$ und die Hyperbel hyp: $16x^2 - 3y^2 = 16$? [37,08°]
E13) hyp: $9x^2 - 16y^2 = 144$ g: y= x + 4
Berechne die Schnittpunkte von hyp und g! [$S_1(-4, 0)$ $S_2(-14\frac{2}{7}, -10\frac{2}{7})$]
E14) Berechne die Schnittpunkte von hyp und g!
a) hyp: $x^2 - y^2 = 9$ g: x + 2y = -3 [$T_1(-3, 0)$, $T_2(5, -4)$]
b) hyp: $16x^2 - 7y^2 = 81$ g: X= (2, 1) + t (1, 2) [$T_1(4, 5)$, $T_2(3, 3)$]

E15) Eine Hyperbel hat den Brennpunkt $F_1(3\cdot\sqrt{3}, 0)$ und geht durch P(6, 3). Bestimme die Gleichung der Hyperbel!
[$x^2 - 2y^2 = 18$]
E16) a) hyp: $2x^2 - y^2 = 14$ hyp: $-4x^2 + 5y^2 = 80$
b) hyp: $x^2 - y^2 = 60$ hyp: $4x^2 - 32y^2 = 128$
Berechne den Schnittwinkel der beiden Hyperbeln! [$\alpha = 25{,}34°$ bzw. 49°23']
E17) Eine Hyperbel hat die Halbachse a = 6 und geht durch den Punkt P(10, 12). Ermittle die Gleichung der Hyperbel und ihrer Asymptoten! [$x^2/36 - y^2/81 = 1$ bzw. $9x^2 - 4y^2 = 324$, Asymptoten: $y = \pm 3x/2$]
E18) Ein Wasserturm hat die Form eines Drehhyperboloides. Der Boden hat einen Durchmesser von $6\sqrt{5}$ m, in der Höhe von 12 m ist der kleinste Durchmesser 6 m. Die Gesamthöhe beträgt 18 m. Zeichne die Hyperbel so in ein Koordinatensystem ein, dass sie in 1. Hauptlage liegt! Ermittle die Gleichung der Hyperbel und den Durchmesser an der Spitze.
[a = 3, $P_1(3\sqrt{5}, -12)$ b = 6, Gleichung der Hyperbel: $x^2/9 - y^2/36 = 1$ bzw. $4x^2 - y^2 = 36$
$P_2(x, 6)$ $x = 3\sqrt{2}$, Durchmesser = 8,5 m]
E19) Von einer Hyperbel sind die Gleichungen der Asymptoten und ein Brennpunkt bekannt: $y = \pm\sqrt{3x}$, $F_2(2, 0)$. Ermittle die Gleichung der Hyperbel! [$3x^2 - y^2 = 3$]
E20) An die Hyperbel aus Beispiel E17 wird in P die Tangente gelegt. Ermittle die Gleichung der Tangente und berechne den Flächeninhalt des Dreiecks, das von der Tangente und den Asymptoten begrenzt wird!
[t: $15x - 8y = 54$, $S_1(18/27)$, $S_2(2/-3)$, A = 54]
E21) Parabel par: $y^2 = -x$ Gerade g: X = (2, -2) + t (-3, 1)
a) Bestimme die Koordinaten der Schnittpunkte von par und g!
b) Bestimme die Gleichungen der Tangenten in den Schnittpunkten an par und g sowie den von ihnen eingeschlossenen Winkel! Wie lang ist die Sehne $S_1 S_2$?
[S_1 (-16, 4) S_2 (-1, -1), t_1: $x+8y-16=0$, t_2: $x - 2y - 1 = 0$, $\alpha = 33{,}69°$, $S_1 S_2 = 15{,}81$]
E22) Parabel par: $x^2 = 2y$ Gerade g: X = (5; 12,5) + t (1, 1)
a) Bestimme die Koordinaten der Schnittpunkte von par und g!
b) Bestimme die Gleichungen der Tangenten in den Schnittpunkten an par und g sowie den von ihnen eingeschlossenen Winkel! Wie lang ist die Sehne $S_1 S_2$?
[S_1 (5; 12,5) S_2 (-3; 4,5), t_1: $10x-2y-25=0$, t_2: $6x + 2y + 9 = 0$, $\alpha = 29{,}74°$, $S_1 S_2 = 8\sqrt{2}$]
E23) hyp: $x^2 - 25y^2 = 25$ g: $y = \sqrt{2}\,x$
Bestimme die Gleichungen der zu g parallelen Tangenten an die Hyperbel sowie die Koordinaten des Berührpunktes! [t_1 : $y = \sqrt{2}\,x + 7$, t_2: $y = \sqrt{2}\,x - 7$]
E24) Eine Ellipse und eine Hyperbel haben dieselben Brennpunkte $F_1(-4, 0)$ und F_2. Sie gehen beide durch $X(3\cdot\sqrt{2}, \sqrt{7})$.
Bestimme die Gleichungen beider Kurven sowie ihren Schnittwinkel! [ell: $x^2 + 2y^2 = 32$, hyp: $7x^2 - 9y^2 = 63$, $\alpha = 108{,}62°$]
E25) Von einer Hyperbel kennt man die Gleichung einer Asymptote a: $y = {}^3/_5\,x$ und den Punkt X(-4, 2). Bestimme die Gleichung der Hyperbel! [$9x^2 - 25y^2 = 44$]
E26) Unter welchem Winkel schneiden einander die Ellipse ell: $x^2 + 9y^2 = 225$ und die Ellipse ell: $x^2 + y^2 = 97$? [52°4"]
E27) Parabel par: $y^2 = 2px$. In 2 symmetrisch zur y - Achse liegenden Punkte werden die Tangenten an die Parabel gelegt, der Schnittpunkt der Tangenten sei S.
Beweise: Der Flächeninhalt des Dreiecks $T_1 T_2 S$ verhält sich zum Flächeninhalt des Dreiecks SS_1S_2 (S_1 und S_2 sind dabei die Schnittpunkte der Tangenten mit der y-Achse) wie 1:4!
E28) Ellipse und Optik:
Beweise: Für eine elliptische Linse gilt: Die Normale auf die Tangente im Punkt P an die Ellipse halbiert den Winkel, den die Strahlen PF_1 und PF_2 bilden!
a) ell: $4x^2 + 9y^2 = 180$ P(6, 2)
b) ell: $x^2 + 2y^2 = 32$ $P(4, -\sqrt{8})$
E29) ell: $3x^2 + 8y^2 = 140$ g: $x + 4y = 14$
Bestimme die Schnittpunkte von Ellipse und Gerade, die Gleichungen der Tangenten in den

Schnittpunkten, den Winkel, den die Tangenten einschließen sowie die Fläche des Dreiecks zwischen Tangenten und g!

E30) ell: $x^2 + 5y^2 = 96$ und g: y=3x-8. Bestimme die Schnittpunkte der Geraden g mit der Ellipse und den Flächeninhalt des Dreiecks OS_1S_2! [$S_1(4, 4)$, $S_2(28/23, -100/23)$]

Graphik:

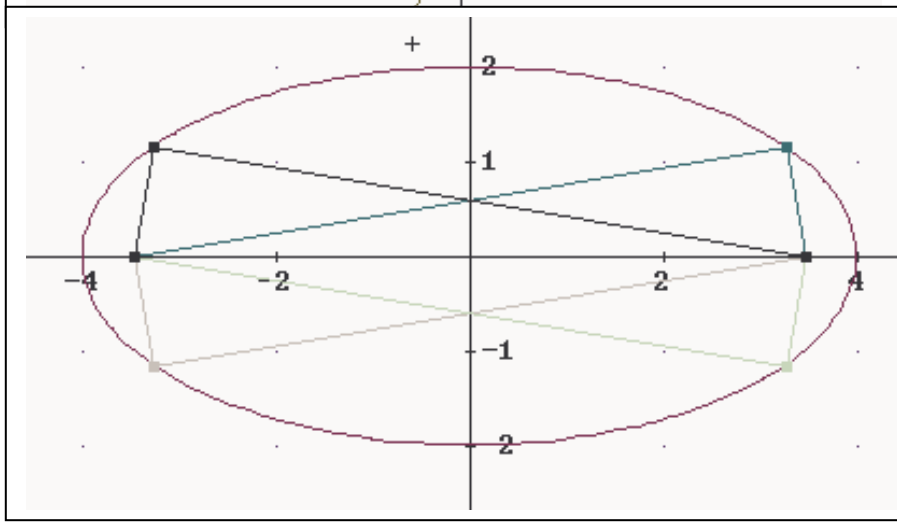


E31) ell: $x^2 + 4y^2 = 16$

Gesucht sind jene Punkte der Ellipse, für die die Strahlen durch die Brennpunkte aufeinander normal stehen !

[$P_{1234}\left(\pm \frac{4}{3} \cdot \sqrt{6}, \pm \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}\right)$]

Zur Veranschaulichung siehe Graphik:



E32) Gegeben sind die Hyperbel hyp: $x^2 - y^2 = 9$ und die Gerade g: $x + 2y = -3$

a) Bestimme die Koordinaten der Brennpunkte der Hyperbel!

[$F_1(3 \cdot \sqrt{2}, 0)$, $F_2(-3 \cdot \sqrt{2}, 0)$]

b) Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte von Hyperbel und Geraden! [$S_1(5, -4)$, $S_2(-3, 0)$]

c) Stelle die Gleichung der Tangente t_1 an die Hyperbel im Schnittpunkt S_1 mit der positiven x-Koordinate auf! [t_1: $5x + 4y = 9$]

d) Berechne den Schnittpunkt X von t_1 mit der x-Achse und daraus den Flächeninhalt des Dreiecks OXS_1 (O ist der Koordinatenursprung!) [$Q(^9/_2, 0)$, A= 3,6 Flächeneinheiten]

E33) Von einer Ellipse kennt man die Koordinaten des Brennpunkts F(4, 0) sowie einen Punkt P(4, 6).

a) Bestimme die Gleichung der Ellipse! [$3x^2 + 4y^2 = 192$]
b) Zeige, dass die Gerade h: $x + 2y = 16$ Tangente an die Ellipse im Punkt P ist!

E34) Durch den Brennpunkt der Parabel par: $y^2 = 12x$ wird eine Parallele zur y-Achse gelegt, welche die Parabel in zwei Punkten S_1 bzw. S_2 schneidet.

a) Berechne die beiden Schnittpunkte S_1 und S_2! [$S_1(3, 6)$, $S_2(3, -6)$]
b) Lege in S_1 und S_2 Tangenten an die Parabel und berechne den Winkel, unter dem diese beiden Tangenten einander schneiden! [t_1: $x – y = -3$ bzw. t_2: $x + y = -3$, $\alpha=90°$]

E35) In $S_1(3, y>0)$ wird die Parabel par: $y^2 = 12x$ von einer Funktion $f(x) = ax^2 + b$ berührt. Bestimme die Gleichung der Funktion f(x)! [$f(x) = {}^1/_6\, x^2 + {}^9/_2$]

E36) Gegeben sind die Hyperbel hyp: $3x^2 - y^2 = 3$ und die Gerade g: $x - y = -1$

a) Bestimme die Koordinaten der Brennpunkte der Hyperbel! ! [$F_1(2, 0)$, $F_2(-2,0)$]
b) Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte von Hyperbel und Geraden! [$S_1(2, 3)$, $S_2(-1, 0)$]
c) Stelle die Gleichung der Tangente t_1 an die Hyperbel im Schnittpunkt S_1 mit der positiven x-Koordinate auf! ! [t:$2x - y = 1$]
d) Berechne den Schnittpunkt X von t_1 mit der x-Achse und daraus den Flächeninhalt des Dreiecks OXS_1 (O ist der Koordinatenursprung!) [$Q(^1/_2, 0)$, A=$^3/_4$ Flächeneinheiten]

E37) Von einer Ellipse kennt man die Koordinaten des Brennpunkts F($2 \cdot \sqrt{2}$, 0)

sowie einen Punkt P(3, 1).

a) Bestimme die Gleichung der Ellipse! [$x^2 + 3y^2 = 12$]
b) Zeige, dass die Gerade h: x + y = 4 Tangente an die Ellipse im Punkt P ist!

E38) Durch den Brennpunkt der Parabel par: $y^2 = 16x$ wird eine Parallele zur y-Achse gelegt, welche die Parabel in zwei Punkten S_1 bzw. S_2 schneidet.

a) Berechne die beiden Schnittpunkte S_1 und S_2! [$S_1(4, 8)$, $S_2(4, -8)$]
b) Lege in S_1 und S_2 Tangenten an die Parabel und berechne den Winkel, unter dem diese beiden Tangenten einander schneiden! [t_1: x – y = -4 bzw. t_2: x + y = -4, α=90°]

E39) In $S_1(4, y>0)$ wird die Parabel par: $y^2 = 16x$ von einer Funktion $f(x) = ax^2 + b$ berührt. Bestimme die Gleichung der Funktion f(x)! [$f(x) = {}^1/_8\, x^2 + 6$]

E40) Eine Parabel in erster Hauptlage geht durch den Punkt P(24/12). Ermittle die Gleichung der Parabel sowie Brennpunkt und Leitlinie! [$y^2 = 6x$, F(1,5 ; 0), l: x = -1,5]

E41) Die Parabel par: $y^2 = 8x$ wird von der Geraden g: 2x - y = 8 geschnitten. Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte und den Flächeninhalt des Dreiecks, das von den Schnittpunkten und dem Scheitel der Parabel gebildet wird! [$S_1(2, -4)$, $S_2(8, 8)$, A = 24]

E42) Ermittle die Gleichungen der Tangenten in den Schnittpunkten aus Beispiel 2. Welchen Winkel schließen die Tangenten miteinander ein? [t_1: x + y = -2, t_2: -x + 2y = 8, α = 71,6°]

E43) Gegeben sind die Parabel par: $y^2 = x$ und die Ellipse ell: $x^2 + 4y^2 = 32$.
Ermittle die Schnittpunkte und Schnittwinkel! [$S_{1,2}(4/\pm 2)$, α = 40,6°]

E44) Berechne die Halbachsen (bzw. Radius, Parameter) und die Schnittpunkte folgender Kegelschnitte:

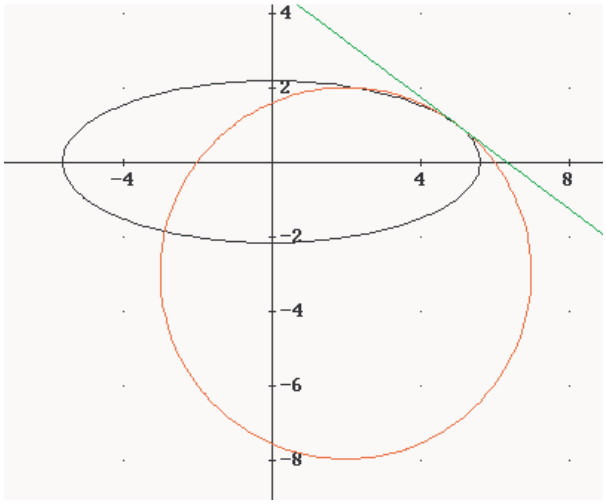
a) ell: $x^2 + 9y^2 = 18$, k: $x^2 + y^2 = 10$ b) hyp: $4x^2 - y^2 = 12$, k: $x^2 + y^2 = 8$
c) hyp: $x^2 - 4y^2 = 256$, ell: $4x^2 + 25y^2 = 2500$ d) ell: $x^2 + 9y^2 = 225$, k: $(x - 16)^2 + y^2 = 25$
e) par: $y^2 = 2x$, hyp: $4x^2 - y^2 = 12$ f) par: $y^2 = x$, ell: $x^2 + 4y^2 = 32$

[a) ell: a = $\sqrt{18}$, b = $\sqrt{2}$; k: r = $\sqrt{10}$, $S_{1\text{-}4}(\pm 3/\pm 1)$ b) hyp: a = $\sqrt{3}$, b = $\sqrt{12}$; k: r = $\sqrt{8}$, $S_{1\text{-}4}(\pm 2/\pm 2)$

c) hyp: a = 16, b = 8; ell: a = 25, b = 10, $S_{1\text{-}4}(\pm 20/\pm 6)$ d) ell: a = 15, b = 5; k: M(16/0), r = 5, $S_{1,2}(12/\pm 3)$ e) par: p = 1; hyp: a = $\sqrt{3}$, b = $\sqrt{12}$, $S_{1,2}(2/\pm 2)$ f) par: p = 1/2; ell: a = $4\sqrt{2}$, b=$2\sqrt{2}$, $S_{1,2}(4/\pm 2)$]

E45)Gegeben ist die Kreisgleichung:
k: $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$

a) Bestimme Mittelpunkt und Radius des Kreises! [M(2, -3), r=5]
b) Zeige, dass die Gerade t: 3x + 4y = 19 Tangente an den Kreis k ist! Berechne auch die Koordinaten des Berührpunkts T! [T(5, 1)]
c) Zeige, dass die Gerade t auch Tangente an die Ellipse ell:$3x^2 + 20y^2 = 95$ ist und dass diese Ellipse den Kreis in T berührt! (siehe Graphik)



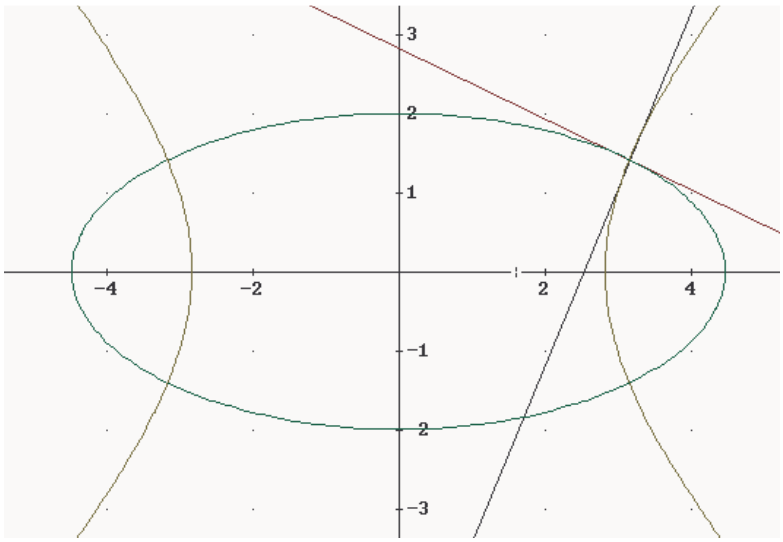
E46) Die Ellipse $x^2 + 5y^2 = 20$ und eine Hyperbel haben die Brennpunkte und den Punkt P($\sqrt{10}$, y>0) gemeinsam.

a) Ermittle die Gleichung der Hyperbel!
b) Zeige, dass die beiden Kurven einander unter einem Winkel von 90° schneiden!
c) Stelle den Verlauf der beiden Kurven in einer Skizze dar!

Lösung zu E46:

a) Aus der Gleichung der Ellipse berechnet man unmittelbar $a^2 = 20$ und $b^2 = 4$. daraus erhält man $F_1(4, 0)$ und $F_2(-4, 0)$. Durch Einsetzen bestimmt man den Punkt P($\sqrt{10}$, $\sqrt{2}$). Damit gilt für die Hyperbel:

$e^2=a^2 + b^2$ und daher: $16=a^2 + b^2$. Setzt man den Punkt in die (unbekannte) Hyperbelgleichung



ein, erhält man:
$10b^2 – 2a^2 = a^2b^2$. Durch Einsetzen von $a^2 = 16 - b^2$ in die erste Gleichung berechnet man folgende Gleichung: $b^4 - 4b^2 – 32=0$. Man erhält daraus $b^2 = 8$. Für a^2 erhält man entsprechend: $a^2 = 8$. Die Hyperbel hat daher die Gleichung $8x^2 – 8y^2 = 64$ oder $x^2 – y^2 = 8$.
b) Für die Gleichungen der Tangenten an Ellipse bzw. Parabel im Punkt P berechnet man:

t_{ell}: $4\cdot\sqrt{10}\cdot x + 20\cdot\sqrt{2}\cdot y=80$ oder: $\sqrt{10}\cdot x + 5\cdot\sqrt{2}\ y = 20$ bzw.

t_{hyp} :$8\cdot\sqrt{10}\cdot x – 8\cdot\sqrt{2}\cdot y = 64$ oder $\sqrt{10}\,x – \sqrt{2}\cdot y = 8$.

Da das Skalarprodukt der beiden Normalvektoren Null ergibt, stehen die beiden Tangenten aufeinander normal. Die beiden Kurven schneiden einander daher unter 90°.

E47) In welchen Punkten der Ellipse ell: $x^2 + 4y^2 = 100$ verlaufen die Tangenten parallel zur Geraden g: $3x + 8y = 10$? Bestimme auch die Gleichungen der beiden Tangenten! [t_1: $3x + 8y=50$, t_2 : $3x + 8y = -50$, $T_1(6, 4)$, $T_2(-6, -4)$]

Maturavorbereitung Kegelschnitte (8. Klasse)
M1) Die Hyperbel hyp: $3x^2 -y^2 = 48$ wird im Punkt $S(8/y_s>0)$ von einer Parabel in 1. Hauptlage ($y^2=2px$) geschnitten.
a) Wie lautet die Gleichung dieser Parabel; unter welchem Winkel schneiden einander die Kurven in S?
b) Fertige eine genaue Skizze an (Asymptoten der Hyperbel, Scheitel beider Kegelschnittslinien, ihre Schnittpunkte, Kurvenverlauf).
c) Die sichelförmige, von Hyperbel und Parabel eingeschlossene Fläche rotiert sowohl um die x- als auch um die y-Achse. Berechne das Verhältnis der so entstandenen Rotationsvolumina.
[**Lösungen:** a) par: $y^2 = 18x$ $\varphi = 26{,}565°$ c) $V_x = 320\pi$ $V_y = 460{,}8\pi$ $V_x : V_y = 25 : 36$]
M2) Die Ellipse ell: $3x^2 + 5y^2 = 120$ und eine Hyperbel haben die Brennpunkte und den Punkt $P(5/y>0)$ gemeinsam.
a) Ermitteln Sie die Hyperbelgleichung.
b) Berechnen Sie den Schnittwinkel φ zwischen Ellipse und Hyperbel.
[**Lösungen:** a) hyp: $3x^2 - 5y^2 = 30$ b) S1234 $(\pm5/\pm3)$ $\varphi = 90°$]
M3) Der Kreis k $[M(\frac{17}{3}/0); r = 5]$ wird von einer Parabel in erster Hauptlage in zwei Punkten berührt. Ermittle die Gleichung der Parabel.[**Lösung** $y^2 = 6x$]
M4) Gegeben: Kreis k: $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 20$, Gerade g: $X = \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\-7\end{pmatrix}$.
a) Berechne die Schnittpunkte A und B von Kreis und Gerade, die Länge der Sehne AB und den Flächeninhalt des Dreiecks ABM, wobei M der Mittelpunkt des Kreises ist.
b) Bestimme die Gleichung eines zweiten Kreise k_2, aus dem die Gerade ebenfalls die Sehne AB abschneidet und der durch den Punkt C(18/12) verläuft.

c) Berechne weiters den Schnittwinkel der beiden Kreise.

[**Lösungen:** a) A(6/-4) B(5/3) AB = $\sqrt{50}$ A = $\frac{25}{2}$ b) k_2: $(x-16)^2 + (y-1)^2 = 125$ c) 63,43°]

M5) Gegeben ist eine Hyperbel $x^2 - 4y^2 = 80$.
a) Zeige, dass die Tangente im Punkt P(12/4) eine Winkelsymmetrale der beiden Geraden PF_1 und PF_2 ist.
b) Berechne die Punkte der Hyperbel, für die die Strecke XF_1 normal zur Strecke XF_2 ist.
[**Lösungen:** a) t: 3x - 4y = 20 b) X_{1234} ($\pm 4\cdot\sqrt{6}$ /±2)]

M6) Gesucht ist die Gleichung einer Hyperbel, welche die gleichen Brennpunkte wie die Ellipse $3x^2 + 5y^2 = 120$ hat und durch den Ellipsenpunkt P(5/y>0) geht.
Die Tangenten in P an Ellipse und Hyperbel schneiden die y-Achse in den Punkten Q und R. Zeige, daß die Punkte Q und R auf jenem Kreis liegen, der durch die Brennpunkte und durch den Punkt P verläuft.
[**Lösungen:** hyp: $3x^2 - 5y^2 = 30$ t_e: x + y = 8 t_h: x - y = 2 Q(0/8) R(0/-2) k: $x^2 + (y-3)^2 = 25$]

M7) Der Kreis k_1 [($\frac{7}{2}$/-$\frac{3}{2}$); $\frac{\sqrt{50}}{2}$] wird von der Geraden g: $X = \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$ geschnitten.

In den Schnittpunkten T_1 und T_2 werden Tangenten an den Kreis gelegt, die einander in einem Punkt S schneiden. Veranschauliche die Situation durch eine Zeichnung und berechne
a) die Koordinaten von S und den Winkel zwischen den Tangenten;
b) den Flächeninhalt des Dreiecks T_1T_2S;
c) die Gleichung und den Flächeninhalt des Umkreises k_2 des Dreiecks T_1T_2S;

[**Lösungen:** a) T_1 (3/2) T_2 (1/-4) S(-4/1) 53,13° b) A = 20 c) k_2: $(x+\frac{1}{4})^2 + (y+\frac{1}{4})^2 = \frac{250}{16}$
A = 49,09]

M8) Eine Parabel mit der Gleichung x^2=2py wird im Punkt P(4/2) von einem Kreis berührt, dessen Mittelpunkt auf der x-Achse liegt. Stelle die Kreisgleichung auf. [**Lösungen:** a) par: $x^2 = 8y$ k: $(x-6)^2 + y^2 = 8$]

M9) Eine Hyperbel in erster Hauptlage geht durch den Punkt P(5/1) und hat eine Asymptote $y = \frac{\sqrt{5}}{5}x$. Eine Parabel in erster Hauptlage hat die Tangente t: $-x + 20y = 20$.
a) Ermittle die Gleichungen der beiden Kegelschnitte und ihren Schnittwinkel.

[**Lösungen:** a) hyp: $x^2 - 5y^2 = 20$ par: $y^2 = \frac{1}{5}x$ S_{12} (5/±1) α = 39,29°]

M10) Von einer Hyperbel sind die Asymptoten $y = \pm\frac{3}{4}x$ und die lineare Exzentrizität e = 5 bekannt.
a) Wie lautet die Gleichung der Hyperbel?
b) t: 5x + 4y = c ist Tangente an die Hyperbel. Berechne c und den Berührpunkt T (nur eine der beiden Lösungen).
c) Zeige: T halbiert das zwischen den Asymptoten liegende Tangentenstück.
d) Zeige: das von der Tangente und den Asymptoten begrenzte Dreieck hat den Flächeninhalt A = ab.

[**Lösungen:** a) $9x^2 - 16y^2 = 144$ b) t_{12}: $y = -\frac{5}{4}x \pm 4$ T_{12} ($\pm 5/\mp\frac{9}{4}$) c) TU = TV = $\frac{3\cdot\sqrt{41}}{4}$ d) A = 12]

M11) Gegeben ist die Hyperbel mit der Gleichung $3x^2 - y^2 = 27$.
Durch den Hyperbelpunkt P(x>0/6) geht ein Kreis mit dem Mittelpunkt M(0/8).

a) Ermittle die Gleichung des Kreises und zeige, dass er die Hyperbel berührt.

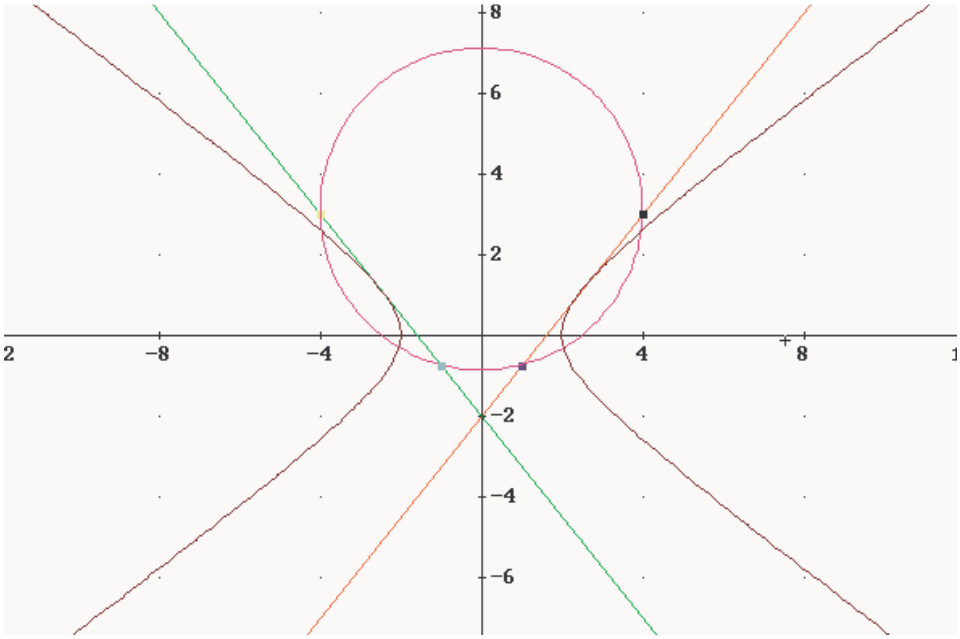
b) Das Flächenstück, das von der Hyperbel, dem Kreis und der x-Achse begrenzt wird, rotiert um die y-Achse. Berechne das Volumen des entstehenden Drehkörpers!

[**Lösungen:** k: $x^2 + (y-8)^2 = 25$; $t_{hyp} = t_k$: $\sqrt{21}x - 2y = 9$ b) V = 42π VE]

M12) Die Ellipse $3x^2 + 5y^2 = 120$ und eine Hyperbel haben die Brennpunkte und den Punkt P(5, y>0) gemeinsam.

a) Ermitteln Sie die Gleichung der Hyperbel.
b) Zeigen Sie, dass sich die beiden Kurven unter einem Winkel von 90° schneiden.
c) Das im 1. Quadranten von beiden Kurven eingeschlossene Flächenstück rotiert um die x-Achse. Wie groß ist das Volumen des entstehenden Drehkörpers?

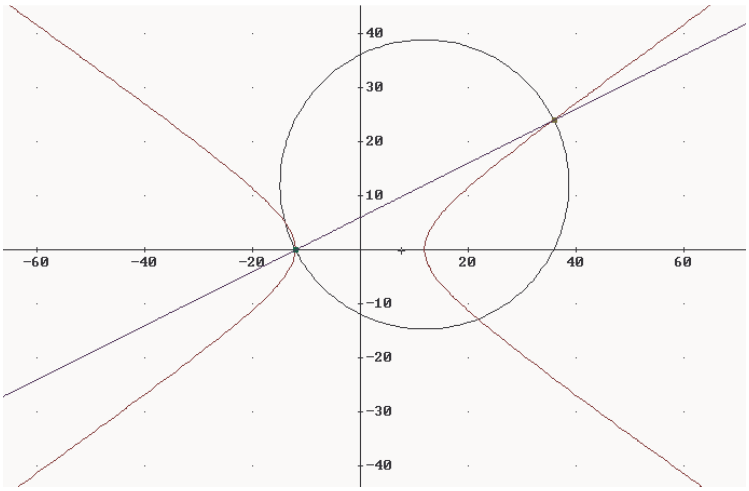
M13) Berechnen Sie die Gleichung eines Kreises, der durch die Brennpunkte der Hyperbel $9x^2 - 16y^2 = 36$ geht und den Mittelpunkt $M(0/\frac{25}{8})$ hat. [$x^2 + (y - {}^{25}/_8)^2 = {}^{1025}/_{64}$]



Berechnen Sie die Schnittpunkte dieses Kreises mit den Asymptoten der Hyperbel. Verbinden Sie die beiden Schnittpunkte miteinander, deren x-Koordinaten positiv sind und beweisen sie, dass diese Verbindungslinie eine Hyperbeltangente ist.
[S_1 (4, 3) S_2(-1, $-{}^3/_4$) bzw. S_3 (-4, 3) S_4 (1, $-{}^3/_4$), die Tangenten lauten t_1: $-{}^5/_4\,x+y=-2$ bzw. t_2: ${}^5/_4\,x + y = -2$ (siehe Graphik)]

M14) Die der Geraden $x - 2y + 12 = 0$ angehörende Sehne der Hyperbel $x^2 - 2y^2 = 144$ ist Durchmesser eines Kreises.

a) Wie lautet die Gleichung dieses Kreises. [Kreis geht durch die Durchmesserpunkte S_1(36,24) und S_2(-12,0) und hat die Gleichung $(x-12)^2 + (y-12)^2 = 720$ (siehe Graphik)]



b) Unter welchen Winkeln schneidet der Kreis die Hyperbel in den Endpunkten der Sehne? [79,695°]

M15) Gegeben sind eine Parabel $y^2 = 2px$ und ein Mittelpunktskreis mit dem Radius $r = \sqrt{8}p$. Berechnen Sie die Schnittpunkte und den Schnittwinkel. [S_1(2p, 2p) S_2(2p, -2p), 63,435°]

M16) Gegeben ist die Parabel $y^2 = 2px$ und die Tangente in P(2p, y>0).

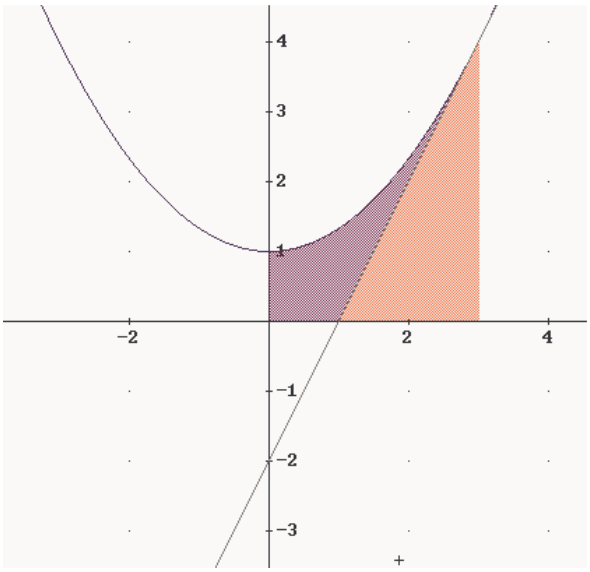
a) Wie groß ist die Fläche, die von der Tangente, der y-Achse und dem Parabelbogen begrenzt wird?
b) Diese Fläche rotiert um die x-Achse und um die y-Achse. Berechnen Sie die Volumina der entstehenden Drehkörper.

M17) Eine Ellipse in 1. Hautplage besitzt im Punkt P(4, y) die Tangente t: $4x + 5y = 25$. Sie wird im Punkt P von einer Hyperbel in 1. Hauptlage rechtwinkelig geschnitten.

a) Wie lautet eine Gleichung der Ellipse? [$9x^2 + 25y^2 = 225$]
b) Wie lautet eine Gleichung der Hyperbel? [$225x^2 - 400y^2 = 2304$]

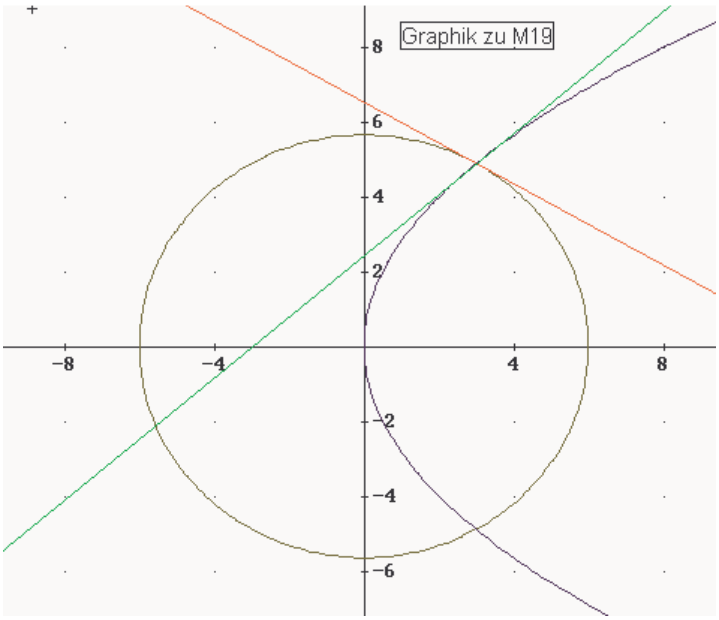
c) Der rechte Hyperbelast und die Ellipse schließen ein Flächenstück ein, welches um die x-Achse rotiert. Wie groß ist das Volumen dieses Rotationskörpers? [10,52 VE]

M18) Im Punkt P(3/y) des Graphen der Funktion $y = x^2/3 + 1$ wird die Tangente t gelegt.

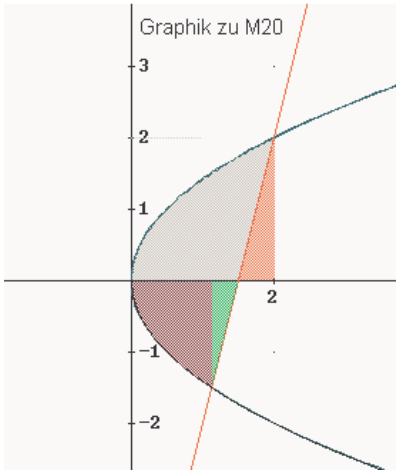


a) Berechnen Sie die Gleichung der Tangente und ihre Nullstelle. [t:: y=2x-2, N(1,0)]
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Flächenstücks, das von der Kurve, der Tangente und den Koordinatenachsen eingeschlossen wird. [2 E^2 , siehe Graphik]
c) Dieses Flächenstück rotiert um die y-Achse. Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Drehkörpers. [V= $^{23}/_6 \cdot \pi$ VE]

M19) Der Brennpunkt der Ellipse $8x^2 + 9y^2 = 288$ ist zugleich Brennpunkt der Parabel $y^2 = 2px$. Bestimmen Sie den Winkel, unter dem sich die beiden Kurven schneiden. Das kleinere der beiden Flächenstücke, die vom Parabel- und Ellipsenbogen begrenzt werden, dreht sich um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers. [par: $y^2=8x$, $S_1(3, 2\cdot\sqrt{6})$, $S_2(3, -2\cdot\sqrt{6})$, 67,79]



M20) Die Gerade t: 4x – y = 6 ist Tangente einer Hyperbel in 1. Hautplage mit dem Achsenverhältnis a:b = 1:2 . Im Berührungspunkt der Tangente wird die Hyperbel von einer Parabel in 1. Hautplage geschnitten!

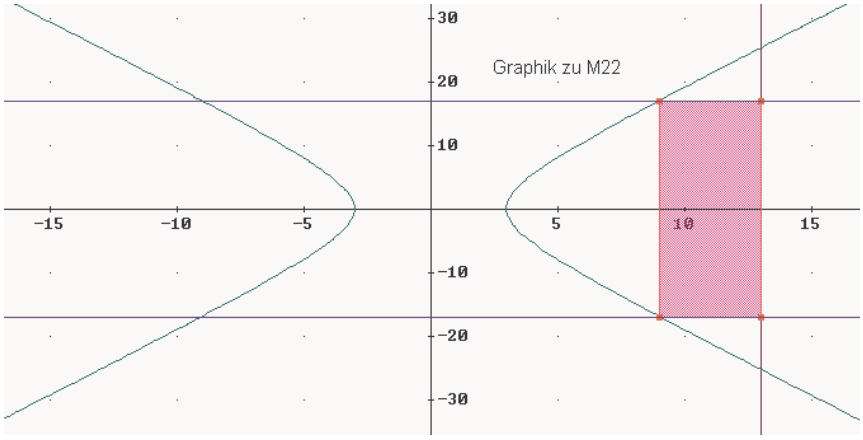


a) Bestimmen Sie die Gleichungen der beiden Kegelschnitte! [$4x^2 - y^2 = 12$, $y^2= 2x$]
b) Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, welches vom Parabelbogen und der Geraden t begrenzt wird! [$^{343}/_{96}$ E^2]
c) Wie groß ist das Volumen des Drehkörpers, der entsteht, wenn das von Hyperbel und Parabel begrenzte sichelförmige Flächenstück um die x-Achse rotiert. [10,923 VE]

M21) Ermitteln Sie die Gleichung der Ellipse, die durch P(2, 2) geht und den Punkt A(3, 0) als Hauptscheitel besitzt. Durch P geht auch eine Parabel von der Form $y^2 = 2px$. Ein gleichschenkeliges Dreieck

besitzt seine Spitze in A und die Basispunkte auf dem Parabelbogen innerhalb der Ellipsenfläche so, dass das Dreieck bei Rotation um die x-Achse einen Kegel mit dem größten Rauminhalt ergibt. Wie groß ist dieses Volumen? Die von Parabel und Ellipse im 1. und 4. Quadranten umschlossene Fläche rotiert um die x-Achse. Wie groß ist dieses Volumen?
[ell: $4x^2 + 5y^2 = 36$, $y^2 = 2x$, $V_{Kegel} = {}^{3}/_{2} \cdot \pi$, $V = {}^{92}/_{15} \cdot \pi$]

M22) Von einer Hyperbel in 1.Hauptlage kennt man den Punkte $P(\sqrt{13}/4)$ und die Asymptote 2x – y = 0. Die Gerade x=13 schneidet von der Hyperbel ein Segment ab, das um die x-Achse rotiert. Dem entstehenden Hyperboloid ist ein Zylinder mit größtem Volumen einzuschreiben. Berechnen Sie:

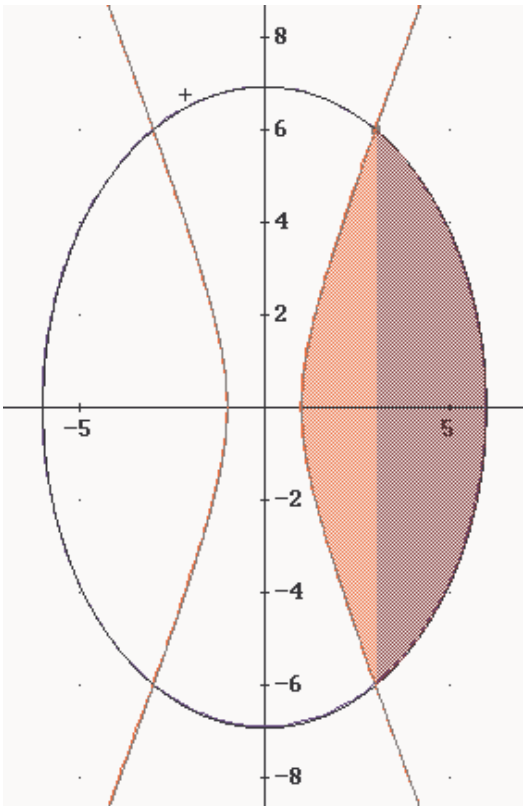


a) Die Gleichung der Hyperbel (Zeigen Sie: $4x^2 - y^2 = 36$)
b) Das Hyperboloidvolumen [$V = {}^{7600}/_{3} \cdot \pi$]
c) Das Volumen des Zylinders [$V=1152\,\pi$]
d) Stellen Sie den Sachverhalt in einer Zeichnung dar!

M23) Durch den Punkt P(2, 6) geht eine Parabel von der Form $y^2 = 2px$.
a) Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel und der Tangente in P. [$y^2=18x$, t: 3x - 2y = -6]
b) Wie groß ist die Fläche, die von der Tangente, der y-Achse und der Parabel eingeschlossen wird? [1 E^2]
c) Diese gemeinsame Fläche dreht sich um die x-Achse und um die y-Achse. Berechnen Sie die Volumina der entstehenden Drehkörper. [$V_x= 6\,\pi$, $V_y = {}^{4}/_{5} \cdot \pi$]

M24) Gegeben ist die Parabel $y^2 = 2px$. Das Flächenstück , das von der y-Achse, der Parabel und der Parabeltangente t im Punkt P(2p, y>0) der Parabel begrenzt wird, rotiert um die x-Achse und um die y-Achse. Berechnen Sie die Volumina der entstehenden Drehkörper. [P(2p, 2p), t: $y={}^{x}/_{2}+p$, $V_x={}^{2}/_{3}\,p^3\cdot\pi$, $V_y= {}^{4}/_{15}\,p^3\cdot\pi$]

M25) Durch den Punkt P(1, 3) geht eine Parabel von der Form $y^2 = 2px$.
a) Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel und die Gleichung der Tangente in P. [$y^2=9x$, t:3x-2y=-3]
b) Wie groß ist der Inhalt des Flächenstückes, das von t, der y-Achse und der Parabel eingeschlossen wird? [${}^{1}/_{4}\,E^2$]
c) Dieses Flächenstück rotiert um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers. [${}^{3}/_{4}$ VE]



M26) Eine Hyperbel in 1.Hauptlage besitzt im Punkt P(3, y) die Tangente t:9x–4y=3. Eine Ellipse in 1.Hauptlage schneidet die Hyperbel im Punkt P und besitzt dort die Tangente t_{ell}: 2x + 3y = c.
a) Ermittle jeweils eine Gleichung der Hyperbel sowie der Ellipse! [hyp: $9x^2 – 2y^2 =9$, ell :$4x^2+3y^2=144$]
b) Das von den beiden Kegelschnittslinien im 1. und 4. Quadranten begrenzte bikonvexe Flächenstück rotiert um die x-Achse. Wie groß ist das Rotationsvolumen?
[90 π VE]
c) Die Hyperbel bildet vom Scheitel A bis zum Punkt P die äußere Begrenzung einer Blumenschale von der Form eines halben einschaligen Hyperboloids. Die

innere Begrenzung hat die Form eines Drehparaboloids, welches durch Rotation der Parabel y = (4x²)/5 + 1 um die y-Achse entsteht. Berechne das Volumen der Blumenschale! [V=$^{51}/_{8}$ · π VE]

M27) Eine Ellipse in 1.Hauptlage besitzt einen Brennpunkt F(2, 0) und verläuft durch den Punkt $P(3/2\sqrt{6})$. Eine Parabel in 1.Hauptlage besitzt ebenfalls den Brennpunkt F.

a) Wie lauten die Gleichungen von Ellipse und Parabel?
b) Berechnen Sie die Schnittpunkte und Schnittwinkel der beiden Kegelschnittslinien!
c) Wie lauten die Gleichungen der gemeinsamen Tangenten, welche man an Ellipse und Parabel legen kann?
d) Wie groß ist das Rotationsvolumen V, welches bei Drehung der gemeinsamen Fläche im 1. und 4. Quadranten um die x-Achse entsteht?

M28) Von einer Hyperbel in 1.Hautplage kennt man einen Punkt $P(6/4\sqrt{3})$ sowie einen Brennpunkt
F(5, 0). Berechne eine Gleichung der Hyperbel! Diese wird von einer Parabel in 2. Hautplage doppelt berührt. Ermittle eine Parabelgleichung und die Koordinaten der Berührungspunkte T_1 und T_2! Das von den beiden Kurven und der x-Achse begrenzte Flächenstück rotiert um die y-Achse. Wie groß ist das Volumen des entstehenden Körpers?

M29) Von einer Hyperbel in erster Hauptlage kennt man eine Tangente t: 5x –4y = 9 und ihren Berührungspunkt T (5, y). T ist gleichzeitig der Schnittpunkt der Hyperbel mit einer Parabel in 1. Hauptlage.

a) Bestimmen Sie die Gleichungen der beiden Kegelschnittslinien.
b) Wie groß ist der Schnittwinkel der beiden Kurven?
c) Das im 1. und 4. Quadranten liegende Flächenstück zwischen Hyperbel und Parabel rotiert um die x-Achse. Wie groß ist diese Rotationsvolumen?

M30) Die Gerade g. y = (-1/3)x + 6 ist Tangente an eine Ellipse in erster Hauptlage, die durch den Punkt P(9, 3) geht. Durch den Punkt P wird eine gleichseitige Hyperbel a = b in erster Hauptlage gelegt.

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung der Ellipse x² + 9y² = 162 lautet.
b) Zeigen Sie, dass die Gleichung der Hyperbel x² - y² = 72 lautet.
c) Unter welchem Winkel schneiden sie einander?
d) Das kleiner Flächenstück, das vom rechten Hyperbelbogen und vom rechten Ellipsenbogen begrenzt wird, rotiert um die y-Achse und bildet einen ringförmigen Drehkörper. Welches Volumen hat dieser?

M31) Eine Hyperbel mit den Asymptoten $y = \pm\frac{x}{\sqrt{2}}$ besitzt eine Tangente t. 3x–4y=2. Eine Ellipse mit der Brennweite $e = 5\sqrt{3}$ verläuft durch den Berührungspunkt T der Hyperbeltangente t an die Hyperbel. Ermittle die Gleichungen der beiden Kegelschnitte in erster Hauptlage sowie ihren Schnittwinkel! Das von den beiden Kegelschnittslinien begrenzte bikonvexe Flächenstück im 1. und 4. Quadranten dreht sich um die x-Achse. Berechne das Rotationsvolumen!

M32) Die Gerade t. x–2y+10=0 ist Tangente einer Parabel. Die Geraden y = ± 0,75x sind Asymptoten einer Hyperbel, deren rechter Brennpunkt mit dem Brennpunkt der Parabel zusammenfällt.

a) Wie lauten die Gleichungen der beiden Kegelschnittslinien?
b) Bestimmen Sie die Koordinaten jenes Punktes P der Parabel im 1. Quadranten, dessen –Koordinate das Doppelte der y-Koordinate ist!
c) Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen Hyperbel und Parabel!
d) Das von den beiden Kegelschnittslinien eingeschlossene Flächenstück rotiert um die x-Achse. Wie groß ist das dabei entstehende Volumen?

M33) Die beiden Geraden t_1: 3x + 5y = 25 und t_2: 3x – 2y = 17 sind Tangenten einer Ellipse in 1.Hauptlage. Der rechte Brennpunkt der Ellipse ist auch Brennpunkt einer Parabel in 1.Hautplage.

a) Ermitteln Sie die Gleichungen der beiden Kegelschnittslinien!
b) Berechnen Sie die Schnittpunkte von Ellipse und Parabel sowie ihren Schnittwinkel!

c) Wie groß ist das Volumen, welches bei Rotation des gemeinsamen Flächenstücks im 1. und 4. Quadranten um die x-Achse entsteht?

M34) Eine Ellipse ist durch die Tangente t. $3x + 8y = 25$ und den Berührungspunkt P(3, 2) gegeben. Durch P geht auch eine Parabel von der Form $y^2 = 2px$.

a) Berstimmen Sie die Gleichung der Ellipse und der Parabel!
b) Den Schnittwinkel der beiden Kurven!
c) Das kleinere (konvexe) Flächenstück, das vom Ellipsen- und Parabelbogen begrenzt wird, rotiert um die y-Achse. Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers.

M35) Gegeben sind die Parabeln $y^2 = 2px$ und $x^2 = 2py$.

a) Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das von beiden Parabeln begrenzt wird.
b) Diese gemeinsame Fläche rotiert um die x-Achse. Wie groß ist das Volumen des entstehenden Drehkörpers. Für welches p beträgt diese Volumen 300πVE?
c) Unter welchen Winkel schneiden sich die beiden Parabeln?

M36) Eine gleichseitige Hyperbel (a=b) in Hauptlage geht durch den Punkt P(5, 3). Durch P geht eine Ellipse, deren Halbachsen a und b sich wie 5:3 verhalten. Wie lauten die Gleichungen der Kegelschnitte?
Der Hyperbelbogen zwischen x-Achse und P sowie der Ellipsenbogen zwischen y-Achse und P begrenzen im 1.Quadranten mit den Koordinatenachsen ein Flächenstück. Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der bei Drehung dieses Flächenstücks um die x-Achse entsteht.
Berechnen Sie den Schnittwinkel dieser beiden Kurven.

M37) Durch den Punkt P(4, y) der Hyperbel $5x^2 - 2y^2 = 30$ geht eine Parabel in 1 Hauptlage.

a) Unter welchem Winkel schneiden einander die beiden Kurven?
b) Die gemeinsame Fläche rotiert sowohl um die x-Achse als auch um die y-Achse. Berechnen Sie die Volumina der dabei entstehenden Rotationskörper.

M38) Der Kreis k(0, -5; r=10) und die Parabel $y=ax^2 + b$ schneiden einander im Punkt P(6, y>0) rechtwinkelig.

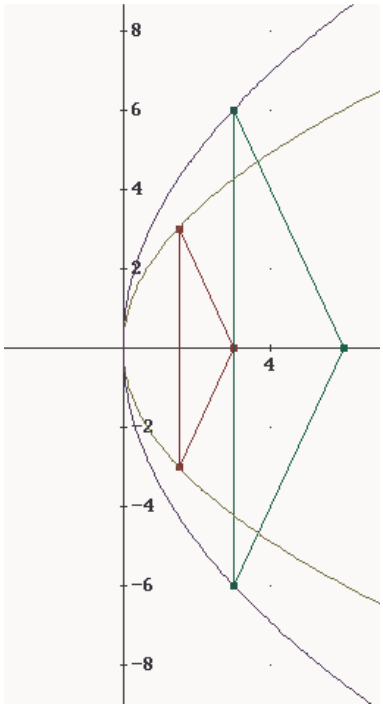
a) Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel!
b) Berechnen Sie das Volumen des Drehkörpers, der entsteht, wenn das kleinere der beiden von Kreis und Parabel umschlossenen Flächenstücke um die y-Achse rotiert.

1) Ein 18m höher Behälter hat innen die form eines Drehhyperboloids. Am Boden ist der Durchmesser $6\sqrt{5}$ m, in 12m Höhe hat er den kleinsten Durchmesser 6m- Berechnen Sie:
   a) Die Gleichung der erzeugenden Hyperbel sowie das Fassungsvermögen des Behälters.
   b) Die Höhe des Wasserspiegels, wenn der Behälter zu 5/6 gefüllt ist.

M39) Der Inhalt eines paraboloidförmigen Glases mit dem oberen Durchmesser 10cm und der Höhe h=12cm soll in einen paraboloidschichtförmigen Becher gefüllt werden der 8cm hoch ist, sein unterer Radius beträgt 4cm, der obere 6cm. Wie hoch steht die Flüssigkeit im Becher?

M40) Die Parabel $y=(1/2)(x^2 + 1)$, die Geraden $5x–y=15$ und $y=9$ bilden mit den beiden Koordinatenachsen im 1.Quadranten ein Flächenstück, das bei Rotation um die y-Achse einen vasenförmigen Körper ergibt.

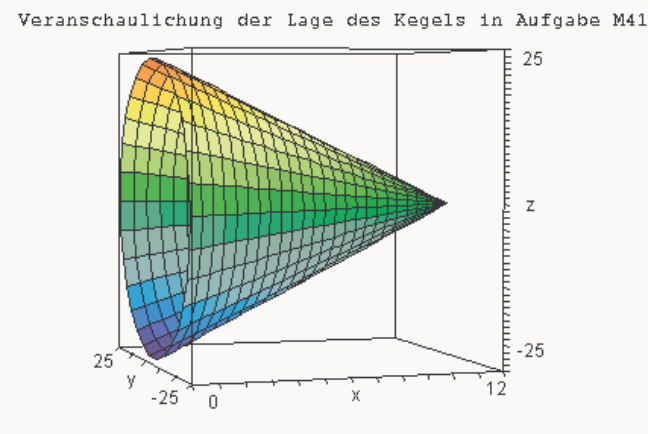
a) Fertigen Sie eine Zeichnung an!
b) Berechnen Sie die Masse des Gefäßes, wenn $\gamma = 7{,}8 g/cm^3$ beträgt und die Maße in cm angenommen werden!
c) Ermitteln Sie das Fassungsvermögen dieses Gefäßes und berechnen Sie, in welcher Höhe die Teilstriche zur Kennzeichnung des Flüssigkeitsspiegels bei 100ml bzw. 200ml angebracht werden müssen!



M41) Der Parabel par:$y^2=2px$ soll ein Dreieck mit der Spitze in P(p, 0) eingeschrieben werden, das bei Rotation um die x-Achse einen Kegel

mit maximalem Volumen erzeugt! Berechne die Maße eines solchen Kegels sowie sein Volumen zuerst allgemein, dann speziell für p=3 und p=6!

[Radius r=p, Höhe h= $^{p}/_{2}$, Volumen V= $\frac{p^3}{6} \cdot \pi$, siehe Graphik]



M42)Die Firmen A in Innsbruck und B in Salzburg haben sich auf den Verkauf mathematischer Spiele und Scherzartikel spezialisiert, die sie ihren Kunden in ganz Österreich persönlich zustellen; die angenommene Entfernung Innsbruck – Salzburg beträgt 150 km. Ein bestimmter Artikel kostet in Innsbruck € 1180,- in Salzburg dagegen nur € 1000,-. Beide Firmen verrechnen eine Zustellgebühr von € 2,- / km.

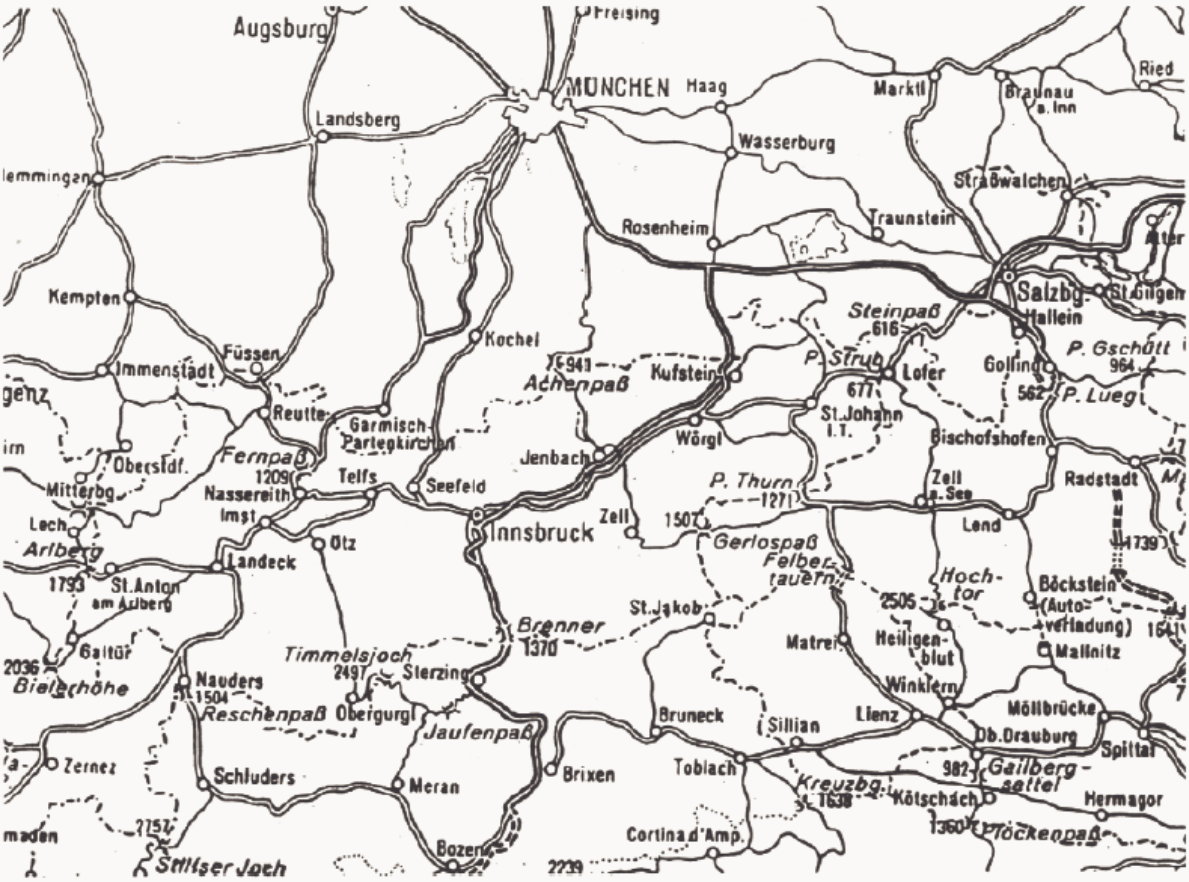
a) Wie verläuft die Konkurrenzgrenze? Ermittle ihre Gleichung, bestimme die geometrische Form der dadurch
beschriebenen Kurve und gib ihre charakteristischen Größen an.

b) Zeichne eine maßstabstreue Skizze der Konkurrenzgrenze in beiliegende Karte.

c) Nenne je 3 Orte, für die es günstiger ist, in Innsbruck bzw. Salzburg einzukaufen. Wo würde ein Klagenfurter einkaufen?

d) Welche Vereinfachungen trifft der mathematische Ansatz gegenüber der Realität?

e) Welche geometrischen Formen kann die Konkurrenzgrenze überhaupt annehmen und wovon hängt das ab?



[Lösungen: a) $\frac{x^2}{2025} - \frac{y^2}{3600} = 1$ ... Hyperbel in erster Hauptlage: M(0 / 0), a = 45, b = 60]