Übungen zu Differenzenquotient und Differentialquotient - Ableitungen – Kurvendiskussion

1) Die Schockwelle einer atomaren Explosion breitet sich annähernd mit $s(t) = 1{,}6\ t^2+3{,}2\ t$ (s in km, t in s) aus. Berechne die mittlere Ausbreitungsgeschwindigkeit in den Intervallen [0,3],[2,5],[3,10] sowie die Geschwindigkeit zu den Zeitpunkten t = 1, 2, 4, 8,10.

2) Die Menge M einer bestimmten Ware, die zum Preis p verkauft werden kann, lässt sich durch folgende Beziehung beschreiben: $M(p) = -250p^2 + 156250$ beschreiben.

a) Bestimme mittels Differenzenquotienten, wie stark die Nachfrage sinkt, wenn der Preis von 10.-S auf 12.-S bzw. von 15.-S auf 20.-S erhöht wird. Wie hoch ist in beiden Fällen die Abnahme je S Preissteigerung?

b) Mit welchem Nachfragerückgang muss man bei einem Preis von 8.-S, (15.-S),
(20.-S) rechnen? Bei welchem Preis ist die Ware unverkäuflich? Erstelle auch eine Zeichnung der Funktion!

3) Für eine Nachfragefunktion N(p) gilt: $N(p) = -60p^2 + 1200p$.

a) Für welche Preise gilt N(p) = 0? Zeichne die Funktion!

b) Bestimme die Änderung der Nachfrage für p=5.-S (8.-S), (12.-S)!

c) In welchem Bereich nimmt die Nachfrage zu, in welchem nimmt sie ab? Welcher Zusammenhang mit N'(p) lässt sich erkennen? Wie verhält sich N(p) für p=10.-S?

[monoton wachsend für p<10, monoton fallend für p>10, Maximum bei p=10]

4) a) An welcher Stelle hat die Funktion $f(x) = \frac{1}{2} x^3$ die Steigung k=6? [+-2]

b) An welcher Stelle hat die Funktion $f(x) = \frac{1}{2} x^4 +4$ die Steigung k=16? [x=2]

c) An welcher Stelle hat die Funktion $f(x) = -\frac{1}{2} x^2 +4x$ die Steigung k=0? [x=4]

5) Bestimme die Ableitungsfunktionen sowie die Gleichung der Tangente in x_0 von:

a) $f(x) = -3/4\ x^2 + 4x - 1 \quad x_0 = -1$ b) $f(x) = -1/4\ x^4 + 2x - 1 \quad x_0 = 1$

c) $f(x) = -5x^2 + 4x - 4 \quad x_0 = -2$ d) $f(x) = -5/4\ x^4 + 4x^3 - x \quad x_0 = 0$

[a) y=5,5x-0,25 b) y= x - 0,25 c) y=24x+16 d)y = -x]

6) Bestimme die Nullstellen der folgenden Funktionen sowie jene Stellen, an denen die Steigung der Tangente k=0 ist (waagrechte Tangente!)

a) $f(x) = 4x^3 + 3x^2 -4x$ b) $f(x) = x^4 + 2x^2 -1$ c) $\frac{1}{2} x^3 -4x$

[a) 0,379 bzw. -0,879 b) x=0 c) 1,633 bzw. -1,633]

7) Eine Funktion der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ hat im Punkt A(4,3) die Tangentensteigung k=-1 und enthält den Punkt B(-4,-5).

Wie lautet diese Funktion? Bestimme die Gleichungen der Tangenten in A und B!

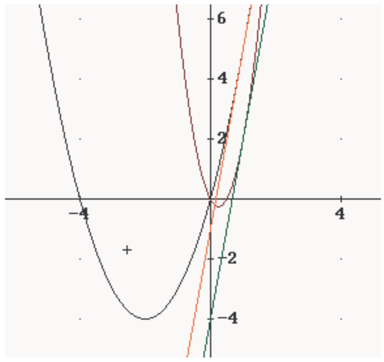
An welchen Stellen kann diese Funktion Maxima bzw. Minima aufweisen?[$1/4x^2 + x + 3$]

8) Heavy Harry, eine wahrhaft gewichtige Gestalt der New Yorker Unterwelt, fand ein unrühmliches Ende, als er von einer unbekannten Hand aus einem Fenster des 65. Stockwerks gestoßen wurde. Unter der Annahme, das dies einer Höhe von 200m entspricht, lässt sich die Höhe H, in der sich Harry nach t Sekunden befand, durch die Funktion $H(t) = 200 – 5t^2$ beschreiben.

a) Skizziere den Verlauf der Funktion in einem sinnvollen Bereich und beschreibe alle ihre Eigenschaften!

b) Wie lange dauerte der „Flug“ Harrys und wie lässt sich dieser Wert interpretieren? [ca. 6,32 Sekunden, entspricht der Nullstelle von f(x)]

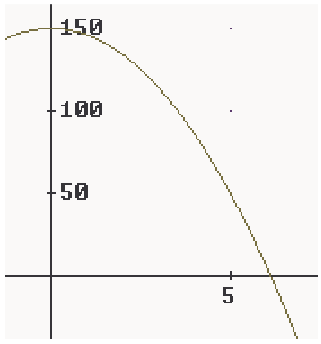
c) Berechne die mittlere Änderung der Höhe pro Sekunde in den Zeitintervallen [1; 3] und [2; 5] und interpretiere das Ergebnis! [-20m bzw. –35m]



d) Mit welcher Geschwindigkeit schlug Harry auf dem Boden auf (vernachlässige den Luftwiderstand!) [H’(t) = -10t,für t=6,32 erhält man 63,2 $^{m}/_{s}$ oder 227,5 $^{km}/_{h}$]

9) a) An welcher Stelle haben $f(x) = 4x^2 – 2x$ und $g(x) = x^2 + 4x$ dieselbe Tangentensteigung? Berechne auch die Gleichungen der beiden Tangenten! [bei x=1, d.h. f(x) in P(1, 2), k_t= 6, t: y=6x-4, g(x) in Q(1,5) t:y=6x-1]

b) Bestimme die Gleichung einer Tangente t an die Funktion f(x), die parallel zur Geraden g: y=14x-2 verläuft! Wie lauten die Koordinaten des Berührpunktes? [k_g=14, d.h. bei x=2, d.h. im Punkt P(2, 12)]



10) $f(x) = x^3 + {}^{9}/_{2}\, x^2 – 30x$

Suche jene Punkte auf f(x), in denen die Funktion eine waagrechte Tangente besitzt! Erkläre ausführlich, was man aus der Lage dieser Punkte für den Verlauf der Funktion entnehmen kann! [bei x_1= -5 und x_2 = 2, d.h. in P(-5; 137,5) und Q(2, -34)]

10) „Rechts kommt nichts!“ – Dies waren die letzten Worte Karlas, dann wurde es Nacht um sie...

Wenn man annimmt, dass der schnittige Ferrari, mit dem Karlas Freund die Reifen rauchen ließ, aus dem Stand beschleunigte, lässt sich die Entfernung s bis zur 150m entfernten Kreuzung durch die Funktion $s(t)= 150 – 4t^2$ beschreiben.

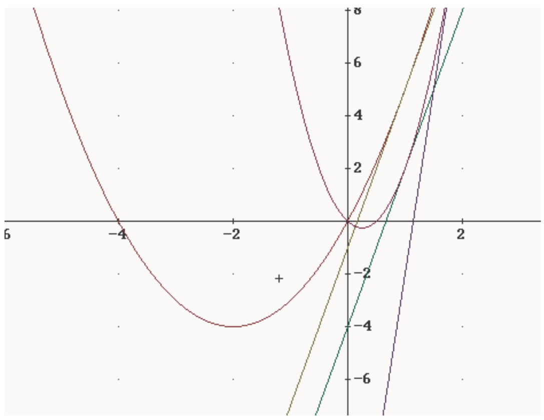
a) Skizziere den Verlauf der Funktion in einem sinnvollen Bereich und beschreibe alle ihre Eigenschaften!

b) Wieviel Zeit verging vom Start bis zum Aufprall und wie lässt sich dieser Wert interpretieren? [ca. 6,12 Sekunden, Nullstelle]

c) Berechne die mittlere Geschwindigkeit pro Sekunde in den Zeitintervallen [1; 3] und [2; 5] und interpretiere das Ergebnis! [-16 bw. –28 $^{m}/_{s}$]

d) Mit welcher Geschwindigkeit erfolgte der Aufprall (vernachlässige den Luftwiderstand!)? 48,98 $^{m}/_{s}$]

11) a) An welcher Stelle haben $f(x) = 3x^2 + 4x$ und $g(x) = 2x^2 + 2x$ dieselbe Tangentensteigung? Berechne auch die Gleichungen der beiden Tangenten! [in P(-1, -1) und Q(-1, 0), t_f: y=-2x-3, t_g: y=-2x-2]



b) Bestimme die Gleichung einer Tangente t an die Funktion f(x), die parallel zur Geraden g: y=14x-2 verläuft! Wie lauten die Koordinaten des Berührpunktes? [t:y=14x- $^{25}/_{3}$, R($^{5}/_{3}$, 15)]

12) $f(x) = {}^{2}/_{3}\, x^3 - x^2 – 24x$

a) Suche jene Punkte auf f(x), in denen die Funktion eine waagrechte Tangente besitzt! [bei x=4 und x=-3]

b) Erkläre ausführlich, was man aus der Lage dieser Punkte für den Verlauf der Funktion entnehmen kann!

13) Bestimme die Nullstellen sowie Extremwerte von $f(x) = x^3 -6x^2 +9x$!

[Extremwerte bei x=3 bzw. x=1, Nullstellen bei x=0,x=3]

14) Bestimme die Nullstellen sowie Extremwerte von $f(x) = x^4 -2x^2 +1$!

[Extremwerte bei x=0 bzw. x=1 bzw. x=-1, Nullstellen bei x=1,x=-1]

15) Berechne alle Ableitungen, die verschieden von 0 sind, für:

$f(x) = 5x^4 -3x^3$ $f(x) = 4x^7 +10$ $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 4$ $f(x) =2x^{10} - 10x^2$

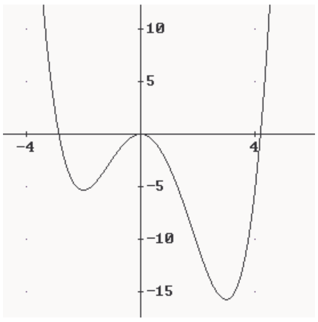
16) $f(x) = 2x^3 -3x^2$

a) Bestimme die Extremwerte dieser Funktion!

b) In welchen Bereichen ist die Änderung der Tangentensteigungen positiv, in welchen negativ? An welcher Stelle ändert sich die Tangentensteigung nicht? Wie könnte man diesen Punkt deuten?

c) Zeige, dass die Funktion $f(x) = 4x^4 + 16x^2 -1$ keine Wendepunkte besitzt! (Zeichnung!)

17) $f(x) = {}^{1}/_{4}\, x^4 – {}^{1}/_{3}\, x^3 –3x^2$



a) Bestimme für diese Funktion alle Nullstellen, alle Extremwerte und alle Wendepunkte!

[N_1(0, 0), N_2(-2,86; 0), N_3(4,19; 0) Min(-2, - $^{16}/_{3}$), Min (3, - $^{63}/_{4}$), Max(0, 0), W_1(1,786; -8,93), W_2(-1,12;-2,9)

b) Bei welchen Extremwerten handelt es sich um Maxima, bei welchen um Minima!

c) Zeichne die Funktion!

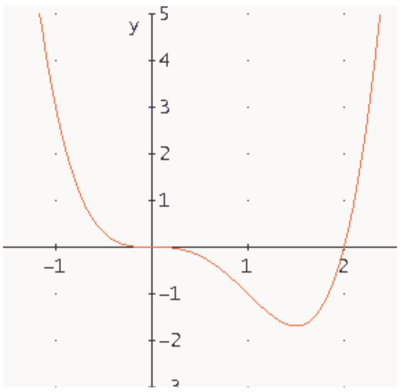
18) $f(x) = {}^{1}/_{3}\, x^3 + x^2$

Berechne Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte dieser Funktion! Zeichne sie möglichst genau! [N_1(0, 0), N_2(-3, 0), Max(-2,$^{4}/_{3}$), Min(0, 0) W(-1, $^{2}/_{3}$)

19) $f(x) = {}^{1}/_{3}\, x^3 –{}^{1}/_{2}\, x^2 –2x$

Berechne Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte dieser Funktion! Zeichne sie möglichst genau!

[N_1(0, 0), N_2(-1,81; 0), N_3(3,31; 0) Max(-1,$^{7}/_{6}$), Min(2, -$^{10}/_{3}$) W($^{1}/_{2}$, -$^{13}/_{12}$)



20) Die Funktion $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ist eine allgemeine Polynomfunktion 4. Grades. Sie hat bei x=0 und x=2 Nullstellen und in W(1,y) einen Wendepunkt mit der Wendetangente t: y=-2x + 1. Bestimme die Funktionsgleichung und ermittle Extremwerte und allfällige weitere Nullstellen! Zeichne die Funktion!

[a=1, b=-2, $f(x) = x^4 - 2x^3$, Min($^3/_2$, $-^{27}/_{16}$)]

21) Die Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ist eine allgemeine Polynomfunktion 3. Grades. Sie hat in E(0,$-^4/_3$) einen Extremwert. In P(1,$-^2/_3$) lautet die Gleichung der Tangente t: 3x + 5y =3. Bestimme die Funktionsgleichung und ermittle Extremwerte und allfällige Nullstellen! Zeichne die Funktion!

[$f(x) = -^{29}/_{15}\, x^3 + {}^{13}/_5 x^2 - {}^4/_3$]

22) Die Funktion $f(x) = (x^3 + a) / bx$ hat den Extremwert E(2,2). Wie lautet die Funktionsgleichung? [a=16, b=6]

23) Die Funktion $f(x) = (a - x^2) / (2x^2 + 6)$ hat die Nullstelle N(3,0). Wie lautet die Funktionsgleichung? [a=9]

24) Polynomfunktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ schneidet x- Achse bei x=-2 und x=4. Die Steigung in der rechten Nullstelle beträgt k=-2. Funktionsgleichung?

[$-1/3\, x^2 + 2/3\, x + 8/3$]

25) Diskutiere die Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$ [Max bei x=0, Min bei x=4, W bei x=2]

26) Diskutiere die Funktion $f(x) = x^3 - 12x + 1$ [Max bei x=-2, Min bei x=2, W bei x=0]

27) Die Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ist eine allgemeine Polynomfunktion 3. Grades. Sie hat bei x=0 eine Nullstelle mit waagrechter Tangente sowie bei x=6 eine weitere Nullstelle mit der Tangentensteigung k=-6. Funktionsgleichung? [$-1/6x^3 + x^2$]

28) Die Funktion $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ist eine allgemeine Polynomfunktion 4. Grades. Sie enthält die Punkte P(4,0) und Q(3,1). Die Steigung der Wendetangente im Punkt W(-2,1) beträgt k=2. Funktionsgleichung? [a=$^{107}/_{5400}$ b=$-^{37}/_{1800}$, c= $-^{539}/_{900}$, d=$^{131}/_{270}$), e=$^{874}/_{225}$]

29) Eine Parabel 4. Ordnung soll in O(0,0) einen Wendepunkt haben und dort unter 45° ansteigen. Außerdem soll in P(3,-1) eine waagrechte Tangente vorliegen!

[$f(x) = {}^1/_9\, x^4 - {}^{13}/_{27}\, x^3 + x$]

30) Bestimme jene Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, die durch P(2, 0) geht und bei E(-2, -4) einen Extremwert hat! Bestimme auch den zweiten Extremwert! [$f(x) = -{}^3/_8\, x^3 - ½\, x^2 + {}^5/_2\, x$, E_1($^{10}/_9$; 1,646) ist lok. Max.]

31) Bestimme jene Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, die durch P(3, 5) geht und bei E(2, 1) einen Extremwert hat! Bestimme auch den zweiten Extremwert! [$f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$, E_1(0, 5) ist lokales Maximum]

32) $f(x) = 1/(1+x^2)$ (sogenannte Locke der Agnesi). Bestimme die Wendepunkte dieser Funktion und zeichne sie möglichst genau! [W_1($\frac{\sqrt{3}}{3}$,$^3/_4$), W_2($-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $^3/_4$)]

33) Die Funktion $f(x) = ax^4 + bx^2 + 2x + c$ ist eine allgemeine Polynomfunktion 4. Grades. Sie enthält den Wendepunkt W(1, $^5/_6$) und hat in W die Steigung k=$^4/_3$. Bestimme die Funktionsgleichung und den zweiten Wendepunkt! Zeichne die Funktion! [$f(x) = {}^1/_{12}\, x^4 - {}^1/_2\, x^2 + 2x - {}^3/_4$, W_2(-1, $-^{19}/_6$)]

34) Eine Polynomfunktion 3. Grades hat O(0,0) als Maximum und T(3,$-^{27}/_2$) als Minimum. Wie lautet die Funktionsgleichung? Bestimme die Gleichung der Wendetangente! [$f(x) = x^3 - {}^9/_2\, x^2$, t_W: $y = -{}^{27}/_4\, x + {}^{27}/_8$]

35) Eine Polynomfunktion 3. Grades hat in P(6, 0) die Tangentensteigung k= -9 und in O(0, 0) eine waagrechte Tangente. Wie lautet die Funktionsgleichung? Bestimme die Gleichung der Wendetangente!

[$f(x) = -^1/_4\ x^3 + {}^3/_2\ x^2$, t_w: y=3x – 2]

36) Die Funktion $f(x) = ax^4 + 2x^3 + bx^2 + d$ ist eine allgemeine Polynomfunktion 4. Grades. Sie besitzt in $S(1,{}^1/_2)$ einen Sattelpunkt. Bestimme die Funktionsgleichung und ermittle Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte!

[$f(x) = -^3/_4\ x^4 + 2x^3 -{}^3/_2\ x^2 + {}^3/_4$, Nullstellen mit Näherungsverfahren: $N_1(-0{,}52; 0)$, $N_2(1{,}69; 0)$, Max$(0, {}^3/_4)$, $W_1(1, {}^1/_2)$, $W_2({}^1/_3, {}^{35}/_{54})$]

37) Die Funktion $f(x) = ¼\ x^4 + bx^3 + cx^2 + d$ ist eine allgemeine Polynomfunktion 4. Grades. Sie besitzt in S(2, 3) einen Sattelpunkt. Bestimme die Funktionsgleichung und ermittle Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte! [$f(x) = {}^1/_4\ x^4 – {}^4/_3\ x^3 + 2x^2 + {}^5/_3$, keine Nullstellen!, Min$(0, {}^5/_3)$, $W_1(2, 3)$, $W_2({}^2/_3, {}^{179}/_{81})$]

38) Gesucht sind jene Polynomfunktionen zweiten Grades, die in x = 2 eine Nullstelle haben. Die Ableitung an der Stelle x=0 soll das Negative der Ableitung an der Stelle x=2 sein, für x=1 soll ein Extremwert vorliegen. [x^2-2x bzw. $4x^2$ - 8x]

39) Für welche Werte von a schneidet $f(x) = (x^3 + ax) / b$ die x - Achse unter 45°?

Bestimme f(x) so, dass in P(-1,2) ein Extremwert vorliegt! [a=b bzw. a=-3,b=2]

40) Der Graph der Funktion $f(x) = ax^2 + bx$ hat in $P(-1, {}^5/_4)$ die Steigung $k=-^3/_2$.

a) Bestimme die Funktion, berechne die Steigungen in den Nullstellen!

b) In welchem Punkt besitzt die Kurve eine waagrechte Tangente?

c)In welchem Punkt besitzt die Kurve eine zur Geraden x + 2y = 4 parallele Tangente?

[$f(x) = ¼\ x^2$ -x , N(0, 0) bzw. N(4, 0) k=-1 bzw. k=1 ,in P(2, -1), in $Q(1, -^3/_4)$]

41) Eine Polynomfunktion 3. Grades geht durch P(2, 5), hat den Wendepunkt W(4, y) mit der Wendetangente t:3x + 2y = 18. [${}^1/_8\ x^3 - {}^3/_2\ x^2 + {}^7/_6\ x + 1$]

42) Die Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ hat die Nullstelle N(-2, 0) und den Wendepunkt W(2, 4). An der Stelle x=1 liegt ein Extremwert vor. Bestimme die Funktionsgleichung und führe eine vollständige Kurvendiskussion durch!

[$f(x) = {}^1/_{13}\ x^3 - {}^6/_{13}\ x^2 + {}^9/_{13}\ x+{}^{50}/_{13}$, Max $(1, {}^{54}/_{13})$, Min $(3, {}^{50}/_{13})$]

43) Die Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ geht durch P(-2, -2) und hat bei x=2 einen Wendepunkt. Die Tangentensteigung an der Stelle x=0 beträgt k_t = -3. Bestimme die Gleichung dieser Funktion!

[$f(x) = {}^1/_4\ x^3 – {}^3/_2\ x^2 –3x$]

44) Die Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ geht durch P(-2, -4) und hat dort die Steigung k_t=8. Im Koordinatenursprung beträgt die Steigung k_t=-2. Bestimme die Gleichung dieser Funktion!

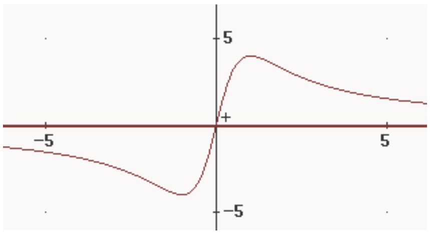
[$f(x) = {}^1/_2\ x^3 – x^2 –2x$]

45) Die Gerade g: y=-2x + 1 ist Tangente an die Funktion $f(x) = ax^2 + b$ in P(-2, y). Bestimme die Gleichung dieser Funktion! [$f(x) = x^2 +3x$]

46) Berechne die Extremwerte der Funktion $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$! [Max $(1, {}^1/_2)$, Min $(-3, -^1/_6)$]

47) Berechne die Extremwerte der Funktion $f(x) = \dfrac{8x}{x^2+1}$!

[Max (1, 4), Min (-1, -4)]



48) Die Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ hat bei x = 0 die Tangentensteigung k_t=-2 und besitzt in E (2, -4) einen Extremwert. Bestimme die Gleichung der Funktion und berechne den Wendepunkt!
[$f(x) = \frac{1}{2} x^3 – x^2 –2x$, $W(\frac{2}{3}, -\frac{8}{3})$]

49) Die Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ hat bei x = 0 einen Wendepunkt mit der Tangentensteigung k_t=1 und geht durch P(2, 4). Bestimme die Gleichung der Funktion! [$f(x) = x^3 – 2x$]

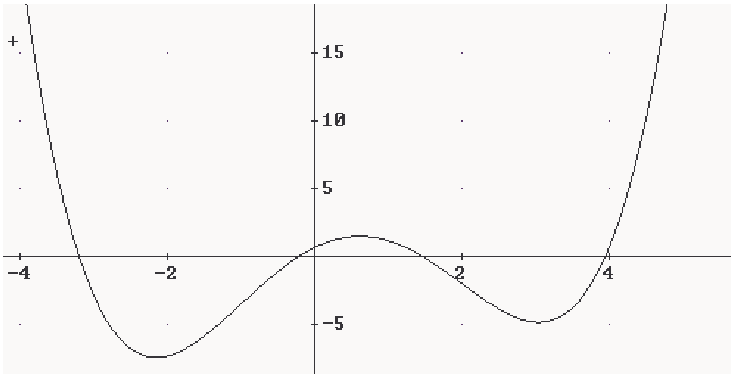
50) Die Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ hat in W(1, 1) eine Wendepunkt und bei x=0 die Tangentensteigung k_t=2. Bestimme die Gleichung der Funktion! [$f(x) = \frac{1}{2} x^3 – \frac{3}{2} x^2 + 2x$]

51) Die Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ hat in W(1, -3)einen Wendepunkt. An der Stelle x=0 beträgt die Tangentensteigung k_t=-2. Bestimme die Gleichung der Funktion! [$f(x) = \frac{1}{2}x^3 – \frac{3}{2} x^2 – 2x$]

52) Die Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ hat in W(1, 1) eine Wendepunkt und bei x=0 die Tangentensteigung k_t = -1. Bestimme die Gleichung der Funktion! [$f(x) = {}^{-}x^3 +3x^2 - x$]

53) Die Funktion $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ ist eine allgemeine Polynomfunktion 3. Grades. Sie geht durch O(0, 0) und hat in P(-2, 0) ein Maximum. Wie groß ist die Steigung in O(0, 0)? Zeige, dass f(x) in der rechten Nullstelle linksgekrümmt ist!
[$x^3 + 4x^2 + 4x$]

54) Von einer Polynomfunktion 4. Grades kennt man $f''(x) = 2x^2 – 2x + a$, wobei $a \in \Re$. Die Funktion hat bei x=2 einen Wendepunkt mit der Wendetangente t_w: 4x + y = 10.



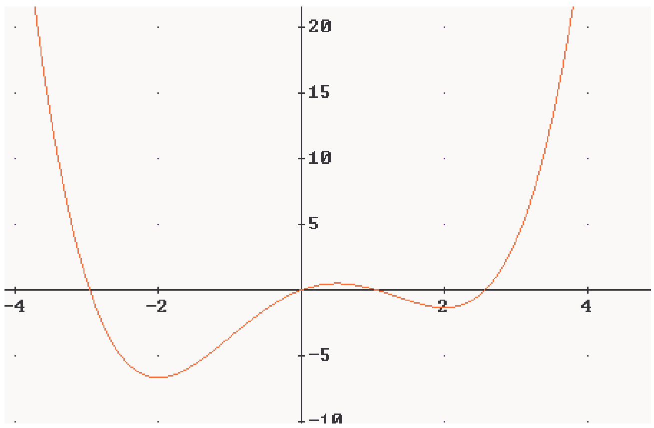
a) Bestimme aus den Angaben die Gleichung der Funktion!

   [$\frac{1}{6} x^4 – \frac{1}{3} x^3 –2x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{2}{3}$]

b) Berechne die Koordinaten der beiden Wendepunkte! [$W_1(-1, -\frac{7}{2})$, $W_2(2, 2)$]

c) Skizziere den Verlauf der Funktion!

55) Von einer Polynomfunktion 4. Grades kennt man $f''(x) = 3x^2 -x + a$, wobei $a \in \Re$. Die Funktion hat bei x= -1 einen Wendepunkt mit der Wendetangente t_w: $y= \frac{9}{2} x + \frac{11}{12}$.



a) Bestimme aus den Angaben die Gleichung der Funktion! [$(x) = \frac{1}{4}x^4 – \frac{1}{6} x^3 –2x^2 + 2x$.]

b) Bestimme Art und Lage aller Extremwerte der Funktion!

[Min (-2, - $^{20}/_{3}$), Min (2, - $^{4}/_{3}$), Max ($^{1}/_{2}$, $^{95}/_{192}$)]

c) Bestimme die Lage der Wendepunkte

[W_1(-1, - $^{43}/_{12}$), W_2($^{4}/_{3}$, - $^{40}/_{81}$)]

d) Skizziere den Verlauf der Funktion!

56) $f(x) = {}^{1}/_{3}\, x^3 - {}^{15}/_{8}\, x^2 + {}^{63}/_{8}\, x + c$ enthält P (5, 2).

a) Diskutiere die Funktion und zeichne ihren Graphen im Bereich [-4, 10]

b) Zeige: Hochpunkt, Wendepunkt und die am weitesten rechts liegende Nullstelle bilden ein gleichschenkliges Dreieck! Berechne den Flächeninhalt dieses Dreiecks!

[N_1 (1, 0), N_2 (7, 0), H (3, 4), T (7, 0), W(5, 2), Fläche = 6 E^2]

57) Für einen Kleinwagen beträgt die Bremsverzögerung $a=-4^{m}/s^2$.

a) Zeige, dass die Funktion $s(t) = v_0\, t - 2\, t^2$ dieser Verzögerung entspricht! s(t) gibt dabei den Bremsweg in m an.

b) Wie groß ist die Momentangeschwindigkeit des Fahrzeugs bei v_0 =50 km/h (100 km/h) nach 2, 4, 6 Sekunden!

c) In Fahrschulen wird zur Berechnung des Bremsweges die Formel $s(v) = v^2/100$ gelehrt. Vergleiche die Resultate, die man mit dieser Formel erhält, mit den tatsächlichen Werten!

58) Eine Kurvenschar f_a wird bestimmt durch alle Polynomfunktionen 2. Grades, welche in E(2,-1) einen Extremwert haben. Bestimme die Gleichung dieser Kurvenschar, zeichne f_a für a=2 und a=-2. Berechne allgemein die Nullstellen!

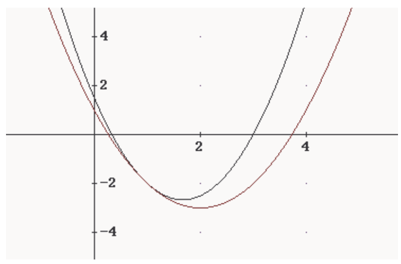
[$f_a(x)= ax^2 - 4ax -1$ $N_1(2+1/\sqrt{a}\ ,0)$, $N_2(2-1/\sqrt{a}\ ,0)$]

59) Eine Kurvenschar f_a wird bestimmt durch alle Polynomfunktionen 3. Grades, welche durch den Ursprung gehen und in W(1,0) einen Wendepunkt haben. Bestimme die Gleichung dieser Kurvenschar, zeichne $f_a(x)$ für a=1 und a=-1. Berechne Extremwerte und Nullstellen! Zeige, dass die Lage der Nullstellen nicht von a abhängt!

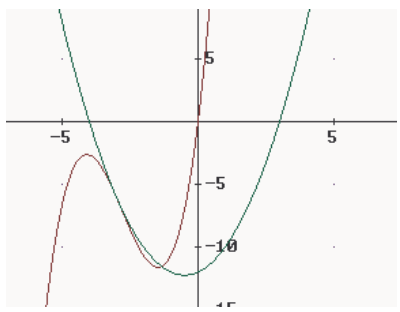
[$f_a(x) = ax^3 -3ax^2 + 2ax$, $N_1(0, 0)$, $N_2(1, 0)$, $N_3(4, 0)$, E bei $(3\pm\sqrt{3})/3)$]

60) Bilde 1. Und 2. Ableitung von

a) $f(x) = \sqrt[4]{x^5} + \sqrt[3]{x^4} + 4$ b) $\sqrt[5]{x^4} + 2\sqrt[3]{x^2} - 1$ c) $\sqrt[4]{x^2} - \sqrt[3]{x^7} - 2$



61) Zeige, dass die Funktion $f(x) = a^2x^4 - bx$ in ihrem gesamten Verlauf linksgekrümmt ist! (Zeichne zur Veranschaulichung $f_1(x)$ mit a=1, b=-1 und $f_2(x)$ mit $a={}^{1}/_{2}$ und b=1)



62) Zeige, dass die Funktion $f(x) = -x^4 + b^4x + c$ in ihrem gesamten Verlauf rechtsgekrümmt ist! (Zeichne zur Veranschaulichung $f_1(x)$ mit b=2 und c=1 und $f_2(x)$ mit $b=-{}^{1}/_{2}$ und c=2)

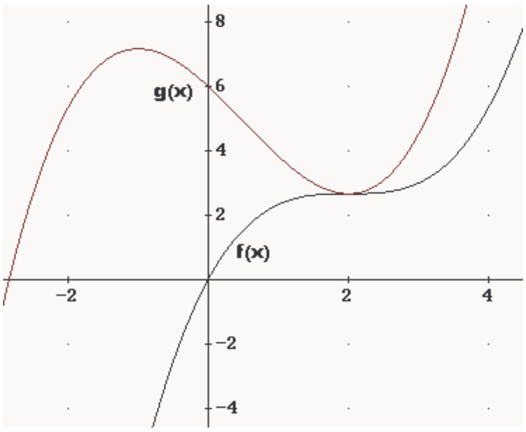
63) Begründe, warum $f(x) = \frac{2}{3} x^3 + 8x^2 - 10$ keine Extremwerte haben kann!

64) Zeige: $f(x)= 1/(x-1)$ kann keine Wendepunkte enthalten! Versuche, eine allgemeine Formel für $f^n(x)$ zu finden!

[Lösung: $f^n(x) = \dfrac{(-1)^{n+1} \cdot n!}{(x-1)^{n+1}}$]

65) Die Funktion $f(x) = x^2 - 4x + 1$ und die Funktion $g(x) = ax^2 + bx + c$ berühren einander im Punkt P(1, y). g(x) enthält außerdem den Punkt Q(3, 0). Bestimme die Gleichung der Funktion g(x), diskutiere beide Funktionen und zeichne sie in ein Koordinatensystem! [$g(x) = \frac{3}{2}x^2 - 5x + \frac{3}{2}$]

66) $f(x) = x^2 + x - 12$ und $g(x) = x^3 + ax^2 + bx$ berühren einander im Punkt P(-3, y). Bestimme die Gleichung der Funktion g(x) , diskutiere beide Funktionen und zeichne sie in ein Koordinatensystem! [$a=\frac{25}{3}$, b=18]



67) $f(x)=x^3 - \frac{3}{2} x^2 - 60x$

a) Bestimme Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkt der Funktion und zeichne sie!

[$N_1(-7{,}03; 0)$, $N_2(8{,}53; 0)$, Max(-4, 152), Min(5, $-\frac{425}{2}$), W($\frac{1}{2}$, $-\frac{121}{4}$)]

68) Zeige, dass die beiden Funktionen $f(x) = \frac{1}{3} x^3 - 2x^2 + 4x$ und $g(x)= \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 - 2x + 6$ keinen gemeinsamen Extremwert, wohl aber einen gemeinsamen Punkt mit waagrechter Tangente haben! Berechne die Koordinaten dieses Punktes! Zeichne beide Funktionen in ein Koordinatensystem!

69) Im Anschluss an ein Bauernhaus soll ein rechteckiger Hühnerhof mit möglichst großer Fläche angelegt werden. Es stehen jedoch nur Bretter für 18m Zaun zur Verfügung! Wie soll der Hühnerhof errichtet werden? [$x= \frac{9}{2}$m, y= 9m, $A_{max} = 40{,}5m^2$]

70) Im Anschluss an ein Bauernhaus soll ein rechteckiger Hühnerhof mit $40m^2$ Fläche errichtet werden. Wie soll man den Hühnerhof anlegen, wenn die Kosten für die Einzäunung möglichst gering sein sollen? [x=4,47m, y=8,94m]

71) Der Hühnerhof grenzt gegenüber des Bauernhauses an einen Bach. Deshalb muss in diesem Bereich der Zaun doppelt gezogen werden. Wie sind die Maße zu bestimmen, wenn die Fläche wiederum $40m^2$ betragen soll und die Kosten möglichst gering sein sollen? [x=y=6,324m]

72) Zum letzten Mal: Die Kosten für den Zaun betragen entlang des Baches 150€/m, sonst 100€/m. Wie muss man die Abmessungen für den Hühnerhof wählen, damit die Gesamtkosten für die Umzäunung möglichst gering sind, wenn die Fläche wiederum $40m^2$ betragen soll? [x=5,48m, y=7,3m, K_{min}=2190,9€ bei einfacher Umzäunung entlang des Baches, x=7,75m, y=5,16m, K_{min}=3098,39€ bei doppelter Umzäunung entlang des Baches]

73) Ein Behälter aus Blech, dessen Fassungsvermögen 48π Liter beträgt, soll die Form eines Zylinders mit oben aufgesetztem Kegel haben. Die Höhe des Kegels soll $\frac{4}{3}$ des Zylinderradius betragen.

a) Wie ist der Behälter zu dimensionieren, wenn zu seiner Herstellung möglichst wenig Blech verbraucht werden soll? Wie groß ist der minimale Materialverbrauch? [r=3dm, h=4dm]

b) Erkläre die Vorgangsweise bei derartigen Aufgaben! Wozu benötigt man eine „Nebenbedingung“?

74) Für ein chemisches Experiment werden Gefäße aus Glas benötigt, die die Form eines Zylinders mit unten aufgesetztem Kegel haben (Kegelspitze nach unten!). Die Höhe des Kegels soll $^5/_{12}$ des Zylinderradius betragen. Das Gefäß soll $390\pi\ cm^3$ fassen.

a) Wie ist das Gefäß zu dimensionieren, wenn zu seiner Herstellung möglichst wenig Glas verbraucht werden soll? Wie groß ist der minimale Materialverbrauch?[r=6cm]

b) Erkläre die Vorgangsweise bei derartigen Aufgaben! Wozu benötigt man eine „Nebenbedingung“?

75) Ein kegelförmiges Zelt soll das Volumen V haben. Wie sind Radius und Höhe zu wählen, damit der Materialverbrauch möglichst gering ist? [$h=r\cdot\sqrt{2}$]

76) Eine zylinderförmige, oben offene Regentonne soll 200 Liter fassen. Wie sind die Maße zu wählen, wenn zu ihrer Herstellung möglichst wenig Blech benötigt werden soll? [r = h = 3,9929dm]

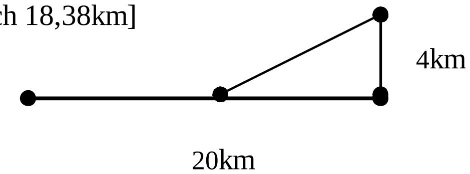
77) Fortsetzung: Die Regentonne soll nur in der Mitte der Oberseite eine kreisförmige Öffnung haben, deren Radius die Hälfte des Grundkreisradius ist. Wie ist die Regentonne zu dimensionieren, wenn zu ihrer Herstellung möglichst wenig Blech benötigt werden soll? [r=3,3135dm, h=5,7985dm]

78) Fortsetzung: Die Regentonne soll nur in der Mitte der Oberseite eine kreisförmige Öffnung haben, deren Radius ein Fünftel des Grundkreisradius ist. Wie ist die Regentonne zu dimensionieren, wenn zu ihrer Herstellung möglichst wenig Blech benötigt werden soll? [r=3,1906dm, h=6,2536dm]

79) Aus einem Karton mit der Länge 20cm und der Breite 15cm werden an den Ecken Quadrate der Seitenlänge a ausgeschnitten. Der Rest wird zu einer oben offenen Schachtel gefaltet. Wie muss man die Größe der ausgeschnittenen Quadrate wählen, damit die Schachtel ein möglichst großes Volumen erhält? [a=2,829cm]

80)Eine zylinderförmige Konservendose soll 0,5 Liter fassen. Die Kosten für Boden und Deckel sind dabei doppelt so hoch wie jene für die Außenwand. Wie sind die Abmessungen zu wählen, wenn die Herstellungskosten möglichst gering sein sollen! [r=3,4139cm, h=13,655cm]

81) Ein Auto fährt auf einer Strasse von einem Ort A mit 40km/h, anschließend querfeldein mit 15km/h zu einem Ort B. Wo muss das Auto abzweigen, damit die gesamte Fahrzeit von A nach B minimal wird? (Skizze!) [nach 18,38km]



82) Der Querschnitt eines Dachbodens hat die Form eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Höhe h=5m und der Basis c=12m. Im Zuge des Dachbodenausbaus sollen Räumlichkeiten mit senkrechten Wänden eingerichtet

werden. Wie hoch und breit soll der Dachbodenausbau sein, wenn möglichst viel Raum gewonnen werden soll?

[Höhe h=2,5m, Breite b=3m]