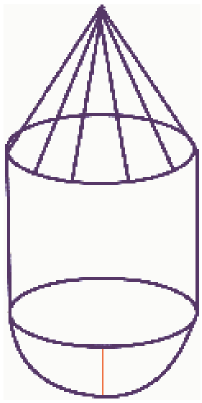
Extremwertaufgaben mit Computerunterstützung



1) Beispiel: Eine Boje soll die Gestalt eines Zylinders haben, dem oben ein halb so hoher Kegel, unten eine Halbkugel mit jeweils demselben Radius aufgesetzt sind. Die Boje soll ein Volumen von 500 Liter haben. Wie ist sie zu dimensionieren, damit zu ihrer Herstellung möglichst wenig Blech benötigt wird? (siehe Skizze)

Lösung mit Derive:

$$O(r,\ h) := 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h + r \cdot \pi \cdot \sqrt{\left(r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2\right)}$$

$$O(r,\ h) := \frac{\pi \cdot r \cdot \sqrt{(h^2 + 4 \cdot r^2)}}{2} + 2 \cdot \pi \cdot h \cdot r + 2 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$V(r,\ h) := \frac{2 \cdot r^3 \cdot \pi}{3} + r^2 \cdot \pi \cdot h + \frac{\frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h}{2}$$

$$V(r,\ h) := \frac{7 \cdot \pi \cdot h \cdot r^2}{6} + \frac{2 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$$

$$\frac{2 \cdot r^3 \cdot \pi}{3} + r^2 \cdot \pi \cdot h + \frac{\frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h}{2} = 500$$

$$\frac{7 \cdot \pi \cdot h \cdot r^2}{6} + \frac{2 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = 500$$

$$\text{SOLVE}\left(\frac{7 \cdot \pi \cdot h \cdot r^2}{6} + \frac{2 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = 500,\ h,\ \text{Real}\right)$$

$$h = \frac{4 \cdot (750 - \pi \cdot r^3)}{7 \cdot \pi \cdot r^2}$$

$$\frac{\sqrt{(53 \cdot \pi^2 \cdot r^6 - 6000 \cdot \pi \cdot r^3 + 2250000)} + 6 \cdot (\pi \cdot r^3 + 1000)}{7 \cdot r}$$

$$\frac{d}{dr} \frac{\sqrt{(53 \cdot \pi^2 \cdot r^6 - 6000 \cdot \pi \cdot r^3 + 2250000)} + 6 \cdot (\pi \cdot r^3 + 1000)}{7 \cdot r}$$

$$\frac{2 \cdot (6 \cdot \sqrt{(53 \cdot \pi^2 \cdot r^6 - 6000 \cdot \pi \cdot r^3 + 2250000)} \cdot (\pi \cdot r^3 - 500) + 53 \cdot \pi^2 \cdot r^6 - 1500 \cdot \pi \cdot r^3 - 1125000)}{7 \cdot r^2 \cdot \sqrt{(53 \cdot \pi^2 \cdot r^6 - 6000 \cdot \pi \cdot r^3 + 2250000)}}$$

$$\frac{2 \cdot (6 \cdot \sqrt{(53 \cdot \pi^2 \cdot r^6 - 6000 \cdot \pi \cdot r^3 + 2250000)} \cdot (\pi \cdot r^3 - 500) + 53 \cdot \pi^2 \cdot r^6 - 1500 \cdot \pi \cdot r^3 - 1125000)}{7 \cdot r^2 \cdot \sqrt{(53 \cdot \pi^2 \cdot r^6 - 6000 \cdot \pi \cdot r^3 + 2250000)}} = 0$$

$$\frac{2 \cdot (6 \cdot \sqrt{(53 \cdot \pi^2 \cdot r^6 - 6000 \cdot \pi \cdot r^3 + 2250000)} \cdot (\pi \cdot r^3 - 500) + 53 \cdot \pi^2 \cdot r^6 - 1500 \cdot \pi \cdot r^3 - 1125000)}{7 \cdot r^2 \cdot \sqrt{(53 \cdot \pi^2 \cdot r^6 - 6000 \cdot \pi \cdot r^3 + 2250000)}} = 0$$

$$2 \cdot (6 \cdot \sqrt{(53 \cdot \pi^2 \cdot r^6 - 6000 \cdot \pi \cdot r^3 + 2250000)} \cdot (\pi \cdot r^3 - 500) + 53 \cdot \pi^2 \cdot r^6 - 1500 \cdot \pi \cdot r^3 - 1125000) = 0$$

$$2\cdot(6\cdot\sqrt{53\cdot\pi^2\cdot r^6 - 6000\cdot\pi\cdot r^3 + 2250000}\cdot(\pi\cdot r^3 - 500) + 53\cdot\pi^2\cdot r^6 - 1500\cdot\pi\cdot r^3 - 1125000) = 0$$

$$\mathrm{NSOLVE}(2\cdot(6\cdot\sqrt{53\cdot\pi^2\cdot r^6 - 6000\cdot\pi\cdot r^3 + 2250000}\cdot(\pi\cdot r^3 - 500) + 53\cdot\pi^2\cdot r^6 - 1500\cdot\pi\cdot r^3 - 1125000) = 0, r, \mathrm{Real})$$

$$r = 4.506316499$$

$$h = \frac{750000000000000000000000000000 - 91509266191421514836127199499\cdot\pi}{35537054681029329751750000000\cdot\pi}$$

$$h = 4.142806706$$

Der Radius beträgt daher 4,51dm, die Höhe 4,14dm.

2) Wie Beispiel 1, jedoch soll der Kegel gleich hoch wie der Zylinder sein! Die Boje soll ein Volumen von 500 Liter haben. Wie ist sie zu dimensionieren, damit zu ihrer Herstellung möglichst wenig Blech benötigt wird?

Lösung mit Derive:

$$O(r, h) := 2\cdot r^2\cdot\pi + 2\cdot r\cdot\pi\cdot h + r\cdot\pi\cdot\sqrt{r^2 + h^2}$$

$$O(r, h) := \pi\cdot r\cdot\sqrt{h^2 + r^2} + 2\cdot\pi\cdot h\cdot r + 2\cdot\pi\cdot r^2$$

$$V(r, h) := \frac{2\cdot r^3\cdot\pi}{3} + r^2\cdot\pi\cdot h + \frac{1}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot h$$

$$V(r, h) := \frac{4\cdot\pi\cdot h\cdot r^2}{3} + \frac{2\cdot\pi\cdot r^3}{3}$$

$$V(r, h) := \frac{2\cdot r^3\cdot\pi}{3} + r^2\cdot\pi\cdot h + \frac{1}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot h = 500$$

$$V(r, h) := r^2\cdot(2\cdot h + r) = \frac{750}{\pi}$$

$$\mathrm{SOLVE}\left(r^2\cdot(2\cdot h + r) = \frac{750}{\pi}, h, \mathrm{Real}\right)$$

$$h = \frac{750 - \pi\cdot r^3}{2\cdot\pi\cdot r^2}$$

$$\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{\pi^2\cdot r^6 - 300\cdot\pi\cdot r^3 + 112500} + 2\cdot(\pi\cdot r^3 + 750)}{2\cdot r}$$

$$\frac{d}{dr}\,\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{\pi^2\cdot r^6 - 300\cdot\pi\cdot r^3 + 112500} + 2\cdot(\pi\cdot r^3 + 750)}{2\cdot r}$$

$$\frac{2\cdot(\pi\cdot r^3 - 375)\cdot\sqrt{\pi^2\cdot r^6 - 300\cdot\pi\cdot r^3 + 112500} + \sqrt{5}\cdot(\pi^2\cdot r^6 - 75\cdot\pi\cdot r^3 - 56250)}{r^2\cdot\sqrt{\pi^2\cdot r^6 - 300\cdot\pi\cdot r^3 + 112500}}$$

$$\frac{2\cdot(\pi\cdot r^3 - 375)\cdot\sqrt{(\pi^2\cdot r^6 - 300\cdot\pi\cdot r^3 + 112500)} + \sqrt{5}\cdot(\pi^2\cdot r^6 - 75\cdot\pi\cdot r^3 - 56250)}{r^2\cdot\sqrt{(\pi^2\cdot r^6 - 300\cdot\pi\cdot r^3 + 112500)}} = 0$$

$$\frac{2\cdot(\pi\cdot r^3 - 375)\cdot\sqrt{(\pi^2\cdot r^6 - 300\cdot\pi\cdot r^3 + 112500)} + \sqrt{5}\cdot(\pi^2\cdot r^6 - 75\cdot\pi\cdot r^3 - 56250)}{r^2\cdot\sqrt{(\pi^2\cdot r^6 - 300\cdot\pi\cdot r^3 + 112500)}} = 0$$

$$2\cdot(\pi\cdot r^3 - 375)\cdot\sqrt{(\pi^2\cdot r^6 - 300\cdot\pi\cdot r^3 + 112500)} + \sqrt{5}\cdot(\pi^2\cdot r^6 - 75\cdot\pi\cdot r^3 - 56250) = 0$$

$$2\cdot(\pi\cdot r^3 - 375)\cdot\sqrt{(\pi^2\cdot r^6 - 300\cdot\pi\cdot r^3 + 112500)} + \sqrt{5}\cdot\pi^2\cdot r^6 - 75\cdot\sqrt{5}\cdot\pi\cdot r^3 - 56250\cdot\sqrt{5} = 0$$

$$\mathrm{NSOLVE}(2\cdot(\pi\cdot r^3 - 375)\cdot\sqrt{(\pi^2\cdot r^6 - 300\cdot\pi\cdot r^3 + 112500)} + \sqrt{5}\cdot\pi^2\cdot r^6 - 75\cdot\sqrt{5}\cdot\pi\cdot r^3 - 56250\cdot\sqrt{5} = 0,\ r,\ \mathrm{Real})$$

$$r = 4.639964444$$

$$h = \frac{117187500000000000000000000 - 156086011715976913472170063\cdot\pi}{67278968879950716050000000\cdot\pi}$$

$$h = 3.224386309$$

Der Radius beträgt daher 4,64dm, die Höhe 3,22dm.

3) Wie Beispiel 1, jedoch soll der Kegel doppelt so hoch wie der Zylinder sein! Die Boje soll ein Volumen von 500 Liter haben. Wie ist sie zu dimensionieren, damit zu ihrer Herstellung möglichst wenig Blech benötigt wird?

Lösung mit DERIVE:

$$O(r,\ h) := 2\cdot r^2\cdot\pi + 2\cdot r\cdot\pi\cdot h + r\cdot\pi\cdot\sqrt{(r^2 + 2\cdot h^2)}$$

$$O(r,\ h) := \pi\cdot r\cdot\sqrt{(2\cdot h^2 + r^2)} + 2\cdot\pi\cdot h\cdot r + 2\cdot\pi\cdot r^2$$

$$V(r,\ h) := \frac{2\cdot r^3\cdot\pi}{3} + r^2\cdot\pi\cdot h + \frac{1}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot 2\cdot h$$

$$V(r,\ h) := \frac{5\cdot\pi\cdot h\cdot r^2}{3} + \frac{2\cdot\pi\cdot r^3}{3}$$

$$V(r,\ h) := \frac{2\cdot r^3\cdot\pi}{3} + r^2\cdot\pi\cdot h + \frac{1}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot 2\cdot h = 500$$

$$V(r,\ h) := r^2\cdot(5\cdot h + 2\cdot r) = \frac{1500}{\pi}$$

$$\mathrm{SOLVE}\left(r^2\cdot(5\cdot h + 2\cdot r) = \frac{1500}{\pi},\ h,\ \mathrm{Real}\right)$$

$$h = \frac{2\cdot(750 - \pi\cdot r^3)}{5\cdot\pi\cdot r^2}$$

$$\frac{\sqrt{3}\cdot(\sqrt{(11\cdot\pi^2\cdot r^6 - 4000\cdot\pi\cdot r^3 + 1500000)} + 2\cdot\sqrt{3}\cdot(\pi\cdot r^3 + 500))}{5\cdot r}$$

$$\frac{d}{dr}\ \frac{\sqrt{3}\cdot(\sqrt{(11\cdot\pi^2\cdot r^6 - 4000\cdot\pi\cdot r^3 + 1500000)} + 2\cdot\sqrt{3}\cdot(\pi\cdot r^3 + 500))}{5\cdot r}$$

$$\frac{2\cdot\sqrt{3}\cdot(2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{(11\cdot\pi^2\cdot r^6 - 4000\cdot\pi\cdot r^3 + 1500000)}\cdot(\pi\cdot r^3 - 250) + 11\cdot\pi^2\cdot r^6 - 1000\cdot\pi\cdot r^3 - 750000)}{5\cdot r^2\cdot\sqrt{(11\cdot\pi^2\cdot r^6 - 4000\cdot\pi\cdot r^3 + 1500000)}}$$

$$\frac{2\cdot\sqrt{3}\cdot(2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{(11\cdot\pi^2\cdot r^6 - 4000\cdot\pi\cdot r^3 + 1500000)}\cdot(\pi\cdot r^3 - 250) + 11\cdot\pi^2\cdot r^6 - 1000\cdot\pi\cdot r^3 - 750000)}{5\cdot r^2\cdot\sqrt{(11\cdot\pi^2\cdot r^6 - 4000\cdot\pi\cdot r^3 + 1500000)}} = 0$$

$$\frac{2\cdot\sqrt{3}\cdot(2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{(11\cdot\pi^2\cdot r^6 - 4000\cdot\pi\cdot r^3 + 1500000)}\cdot(\pi\cdot r^3 - 250) + 11\cdot\pi^2\cdot r^6 - 1000\cdot\pi\cdot r^3 - 750000)}{5\cdot r^2\cdot\sqrt{(11\cdot\pi^2\cdot r^6 - 4000\cdot\pi\cdot r^3 + 1500000)}} = 0$$

$$2\cdot\sqrt{3}\cdot(2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{(11\cdot\pi^2\cdot r^6 - 4000\cdot\pi\cdot r^3 + 1500000)}\cdot(\pi\cdot r^3 - 250) + 11\cdot\pi^2\cdot r^6 - 1000\cdot\pi\cdot r^3 - 750000) = 0$$

$$(12\cdot\pi\cdot r^3 - 3000)\cdot\sqrt{(11\cdot\pi^2\cdot r^6 - 4000\cdot\pi\cdot r^3 + 1500000)} + 22\cdot\sqrt{3}\cdot\pi^2\cdot r^6 - 2000\cdot\sqrt{3}\cdot\pi\cdot r^3 - 1500000\cdot\sqrt{3} = 0$$

$$\mathrm{NSOLVE}((12\cdot\pi\cdot r^3 - 3000)\cdot\sqrt{(11\cdot\pi^2\cdot r^6 - 4000\cdot\pi\cdot r^3 + 1500000)} + 22\cdot\sqrt{3}\cdot\pi^2\cdot r^6 - 2000\cdot\sqrt{3}\cdot\pi\cdot r^3 - 1500000\cdot\sqrt{3} = 0,\ r,\ \mathrm{Real})$$

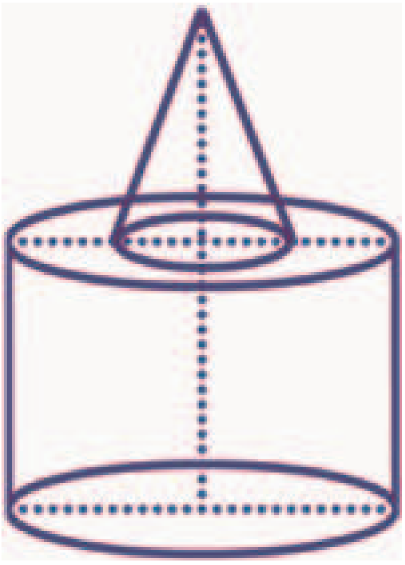
$$r = 4.496567584$$

$$h = \frac{22888183593750000000000000 - 2774555656052722814434553\cdot\pi}{1542596438406341328125000\cdot\pi}$$

$$h = 2.924277112$$

Der Radius beträgt daher 4,50dm, die Höhe 2,92dm.

4) Ein Gefäß soll die Gestalt eines Zylinders haben, dem oben ein Kegel mit gleicher Höhe, jedoch nur halb so großem Radius aufgesetzt ist. Wie sind die Abmessungen des Gefäßes zu wählen, damit bei einem Fassungsvermögen von 100 Liter möglichst wenig Material benötigt wird? (siehe Skizze)



$$r^2\cdot\pi + 2\cdot r\cdot\pi\cdot h + r^2\cdot\pi - \frac{1}{4}\cdot r^2\cdot\pi + r\cdot\pi\cdot\sqrt{\left(\frac{r^2}{4} + h^2\right)}$$

$$\frac{\pi\cdot r\cdot\sqrt{(4\cdot h^2 + r^2)}}{2} + 2\cdot\pi\cdot h\cdot r + \frac{7\cdot\pi\cdot r^2}{4}$$

$$r^2\cdot\pi\cdot h + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{r}{2}\right)^2\cdot\pi\cdot h = 100$$

$$\frac{13\cdot\pi\cdot h\cdot r^2}{12} = 100$$

$$\mathrm{SOLVE}\left(\frac{13\cdot\pi\cdot h\cdot r^2}{12} = 100,\ h,\ \mathrm{Real}\right)$$

$$h = \frac{1200}{13\cdot\pi\cdot r^2}$$

$$\frac{2\cdot\sqrt{169\cdot\pi^2\cdot r^6 + 5760000} + 91\cdot\pi\cdot r^3 + 9600}{52\cdot r}$$

$$\frac{d}{dr}\ \frac{2\cdot\sqrt{169\cdot\pi^2\cdot r^6 + 5760000} + 91\cdot\pi\cdot r^3 + 9600}{52\cdot r}$$

$$\frac{(91\cdot\pi\cdot r^3 - 4800)\cdot\sqrt{169\cdot\pi^2\cdot r^6 + 5760000} + 2\cdot(169\cdot\pi^2\cdot r^6 - 2880000)}{26\cdot r^2\cdot\sqrt{169\cdot\pi^2\cdot r^6 + 5760000}}$$

$$\frac{(91\cdot\pi\cdot r^3 - 4800)\cdot\sqrt{169\cdot\pi^2\cdot r^6 + 5760000} + 2\cdot(169\cdot\pi^2\cdot r^6 - 2880000)}{26\cdot r^2\cdot\sqrt{169\cdot\pi^2\cdot r^6 + 5760000}} = 0$$

$$(91\cdot\pi\cdot r^3 - 4800)\cdot\sqrt{169\cdot\pi^2\cdot r^6 + 5760000} + 2\cdot(169\cdot\pi^2\cdot r^6 - 2880000) = 0$$

$$(91\cdot\pi\cdot r^3 - 4800)\cdot\sqrt{169\cdot\pi^2\cdot r^6 + 5760000} + 2\cdot(169\cdot\pi^2\cdot r^6 - 2880000) = 0$$

$$\mathrm{NSOLVE}((91\cdot\pi\cdot r^3 - 4800)\cdot\sqrt{169\cdot\pi^2\cdot r^6 + 5760000} + 2\cdot(169\cdot\pi^2\cdot r^6 - 2880000) = 0,\ r,\ \mathrm{Real})$$

$r = 2.817384336$

$$h = \frac{1562500000000000000}{134361339137494911\cdot\pi}$$

$h = 3.701654064$

2.817384336

3.701654064

$$o = \pi\cdot\left(\frac{91611\cdot\sqrt{9055394794405461388226 05}}{7812500000000000} + \frac{542950933182819759}{15625000000000000}\right)$$

$$o = \pi\cdot\left(\frac{91611\cdot\sqrt{905539479440546138822605}}{7812500000000000} + \frac{542950933182819759}{15625000000000000}\right)$$

$o = 144.2226656$