Wachstumsprozesse - Modellgleichungen –Finanzmathematik

1) Weltweiter Tourismus - Wachstum ohne Ende
Die folgende Tabelle stellt die Reiseausgaben im Ausland (in Mrd. $) im Zeitraum 1971 / 1996 dar:

Jahr	1971	1976	1981	1986	1991	1996
Ausgaben in Mrd. $	21	44	107	142	272	423

a) Berechne die durchschnittliche jährliche Änderungsrate in % und erstelle ein Wachstumsmodell der Form $A_t = A_0 \ a^t$. [a=1,1276]

b) Berechne mit Hilfe dieses Wachstumsmodells Modellwerte für den angegebenen Zeitraum und erstelle eine Prognose für die Jahre 2000 und 2002!
[683,9; 869,62]

c) In welchem Jahr werden, bei gleichbleibender Zunahme, die Reiseausgaben voraussichtlich 1000 Mrd. $ übersteigen? [ca. im Jahr2003]

2)"Der Ski-Weltmarkt schrumpft"
Verkaufte Schi im Zeitraum 1994 / 1998 (Zahlen in Millionen Paar)

Jahr	1988	1990	1992	1994	1996	1998
Mill. Paar	5,8	5,1	5,6	5,2	4,7	4,4

a) Berechne die durchschnittliche jährliche Änderungsrate in % und erstelle ein Wachstumsmodell der Form $A_t = A_0 \ a^t$. [a=0,97275]

b) Berechne mit Hilfe dieses Wachstumsmodells Modellwerte für den angegebenen Zeitraum und erstelle eine Prognose für die Jahre 2000 und 2002! [4,16; 3,93]

c) In welchem Jahr ist, bei gleichbleibender Abnahme, mit einem Verkauf von weniger als 3 Millionen Paar Schi zu rechnen? [ca. im Jahre 2011]

3) Ein Holzbestand hat durch Schlägerungen und andere widrige Umstände abgenommen. 1985 betrug der Holzbestand 360000m^3, im Jahre 1997 312000m^3. Schätze den Holzbestand im Jahre 2000! Wie groß war der Bestand etwa im Jahre 1960? Modelliere sowohl mit einem linearen als auch mit einem geometrischen Modell! [linear: 2000: 260000m^3, 1960: 460000m^3, geometrisch: 2000: 301035m^3, 1960: 485039m^3]

4) Ein bestimmtes Medikament wird vom Körper mit einer Rate von ca. 8% pro Stunde abgebaut.

a) Durch welche Modellgleichung lässt sich der Abbau des Medikaments beschreiben? Wie groß ist die Konzentration nach 10 Stunden, wenn ursprünglich 10mg des Medikaments verabreicht wurden? [4,34mg]

b) Ein Patient erhält um 18 Uhr eine Tablette mit 10mg des Medikaments. Wann muß er die nächste Tablette nehmen, wenn ständig zumindest 3mg Wirkstoff im Körper sein sollen? [Näherung ergibt ca. 14,4 Stunden]

c) Frau Immerkrank ist zu bequem, nachts aufzustehen und nimmt daher um 20 Uhr eine 10mg Tablette und eine weitere Tablette vor dem Schlafengehen um 22 Uhr. Wie hoch ist die Wirkstoffkonzentration um 6 Uhr früh? [ca. 9,47mg]

d) Bringt es einen Vorteil, mehrere Tabletten gleichzeitig zu sich zu nehmen? Wann wäre der günstigste Zeitpunkt für eine Einnahme, wenn ausreichend Wirkstoff im Körper sein soll? Wie lange würde man in diesem Fall mit 3 Tabletten auskommen? [Mit 3 Tabletten kommt man günstigstenfalls 49,57 Stunden aus. Achtung! Nach Einnahme der 2. Tablette ist die Konzentration auf 13mg angestiegen, diese reicht natürlich länger, ebenso bei der 3. Tablette!]

Fortsetzung von Beispiel 4: Wie verändert sich die Konzentration über einen längeren Zeitraum bei regelmäßiger Einnahme eines bestimmten Medikaments?

Nimmt der Patient etwa alle 12 Stunden eine Tablette mit 10mg Wirkstoff zu sich und werden pro Stunde 8% des Wirkstoffs abgebaut, so kann man de Konzentration nach 12, 24, 36 Stunden folgendermaßen beschreiben:

$K_{12}= 10\ \ 0{,}92^{12}$ $K_{24}= (K_{12} + 10)\ \ 0{,}92^{12}$ $K_{36}= (K_{24} + 10)\ \ 0{,}92^{12}$

Sei K_{12n} die Konzentration in 12 Stunden-Einheiten, so gilt:

$K_{12n}= K_0\ \ q + K_0\ \ q^2 + ... + K_0\ \ q^n$.

Das sind n Summanden. Nach der Summenformel für geometrische Reihen erhält man:

$K_{12n} = q\ \ (K_0 + K_0\ \ q + ... + K_0\ \ q^{n-1}) = K_0\ \ q\ \ (q^n - 1) / (q - 1)$. Dabei ist $q=0{,}92^{12}$.

(Man beachte: Diese Formel entspricht genau der Summenformel für vorschüssig fällige Renten!)

Man berechnet daher für die Konzentration nach 36 Stunden (jeweils vor Einnahme der nächsten Tablette):

$K_{36} = 10\ \ 0{,}92^{12}\ \ ((0{,}92^{12})^3 - 1) / (0{,}92^{12} - 1) = 5{,}52$mg.

Die Konzentration nach einer Woche (n=14) beträgt:

$K_{168} = 10\ \ 0{,}92^{12}\ \ ((0{,}92^{12})^{14} - 1) / (0{,}92^{12} - 1) = 5{,}81$mg.

Setzt man diese Überlegungen fort, so kann man auch die Grenzkonzentration bei fortwährender Einnahme berechnen. Nach der Summenformel für geometrische Reihen gilt für die Grenzkonzentration K:

$$K = \lim_{n\to\infty} K_n = K_0 \cdot q \cdot \frac{1}{1-q} = 5{,}8144\text{mg.}$$

5) Ein Badeteich ist durch die Einleitung von Schadstoffen verunreinigt worden. Derzeit beträgt die Konzentration 0,8%. Pro Monat können ca. 5% der Schadstoffe abgebaut werden.

a) Wie groß ist die Schadstoffkonzentration nach 3, 5 Monaten, nach 2 Jahren? [0,686%; 0,62%; 0,23%]

b) Wann sinkt die Schadstoffkonzentration unter 1‰? [nach 40,55 Monaten]

c) Wann kann man wieder baden, wenn eine Schadstoffmenge von 1,5% der Anfangsmenge noch toleriert wird? [nach 81,88 Monaten]

6) Das Deutsche Institut für Wirtschaftsforschung legte 1996 eine Modellrechnung für die Entwicklung der Arbeitslosenzahl vor. Darin heißt es: Bei einem jährlichen Wirtschaftswachstum von 2,5% wird die Anzahl der Arbeitslosen bis zum Jahre 2010 auf rund 2,8 Mio. sinken. 1996 gab es in Deutschland 3,965 Mio. Arbeitslose.

a) Mit welchem jährlichen Rückgang wurde hier modelliert. Stelle ein entsprechendes Gesetz auf! [ca. 2,46%Abnahme jährlich]

Wie stark wird die Wirtschaft aufgrund dieser Annahmen bis zum Jahre 2010 gegenüber 1996 gewachsen sein? [um ca. 41,2% gegenüber 1996]

7) Angebot 1: Eigentumswohnung in Top-Lage, 90m^2, mit Balkon und Terrasse, Kaufpreis 250000.-€ oder Anzahlung 65000.-€, Rest mit monatlicher Rückzahlung von 950.-€ (Jahreszinssatz 6%).

a) Berechne die Restschuld nach 3 Jahren und die bisherige Gesamtbelastung! [nach 3 Jahren Restschuld: 184016,60.-€, Gesamtbelastung samt Anzahlung bisher: 99200.-€]
b) Wie lange dauert die Tilgung bei einem Jahreszinssatz von 6% und einer monatlichen Rate von 1500.-€ (wer kann das schon zahlen??)? [16 Jahre und ca. 1 Monate!]

8) Angebot 2: Eigentumswohnung in Top-Lage, 60m^2, mit Balkon und Tiefgarage, Kaufpreis 150000.-€ oder Anzahlung 50000.-€, Rest mit monatlicher Rückzahlung. (Jahreszinssatz 6%).
a) Berechne die Höhe der monatlichen Rate bei einer Laufzeit von 20 (30) Jahren sowie die Gesamtbelastung! [716,43€ bei 20 Jahren, 599,55€ bei 30 Jahren]
9) Ein Haus wird zum Preis von 200000€ angeboten. Als Rückzahlungszeitraum für den Kredit werden 30 Jahre vereinbart. Wie hoch sind die zu erwartenden monatlichen Rückzahlungsraten bei einem Jahreszinssatz von 3% (Rechne mit dem relativen monatlichen Zinssatz!) [Rate etwa 843,21€]
10) Für einen Gebrauchtwagen nimmt Herr Neureich einen Kredit in der Höhe von 7500.-€ auf. Er vereinbart bei einem Jahreszins von 7% monatliche Raten in der Höhe von 180.-€.

a) Stelle die ersten 5 Monate des Tilgungsplans auf! (Rechne mit dem relativen monatlichen Zinssatz, Zahlungen erfolgen jeweils am Monatsende!)

Monate	Betrag Beginn	Zinsen	Zahlung	Tilgungsanteil	Betrag Ende
1	7.500,00 €	43,75 €	180,00 €	136,25 €	7.363,75 €
2	7.363,75 €	42,96 €	180,00 €	137,04 €	7.226,71 €
3	7.226,71 €	42,16 €	180,00 €	137,84 €	7.088,86 €
4	7.088,86 €	41,35 €	180,00 €	138,65 €	6.950,21 €
5	6.950,21 €	40,54 €	180,00 €	139,46 €	6.810,76 €

b) Nach 5 Monaten wird Herr Neureich arbeitslos, er kann monatlich lediglich 100.-€ zurückzahlen. Setze den Tilgungsplan bis zum Ende des 3. Jahres fort! Wie groß ist dann seine Restschuld? Was ist dann mit dem Gebrauchtwagen??

Monate	Betrag Beginn	Zinsen	Zahlung	Tilungsanteil	Betrag Ende
6	6.810,76 €	39,73 €	100,00 €	60,27 €	6.750,49 €
7	6.750,49 €	39,38 €	100,00 €	60,62 €	6.689,87 €
8	6.689,87 €	39,02 €	100,00 €	60,98 €	6.628,89 €
9	6.628,89 €	38,67 €	100,00 €	61,33 €	6.567,56 €
10	6.567,56 €	38,31 €	100,00 €	61,69 €	6.505,87 €
11	6.505,87 €	37,95 €	100,00 €	62,05 €	6.443,82 €
12	6.443,82 €	37,59 €	100,00 €	62,41 €	6.381,41 €
13	6.381,41 €	37,22 €	100,00 €	62,78 €	6.318,64 €
14	6.318,64 €	36,86 €	100,00 €	63,14 €	6.255,49 €
15	6.255,49 €	36,49 €	100,00 €	63,51 €	6.191,98 €
16	6.191,98 €	36,12 €	100,00 €	63,88 €	6.128,10 €
17	6.128,10 €	35,75 €	100,00 €	64,25 €	6.063,85 €
18	6.063,85 €	35,37 €	100,00 €	64,63 €	5.999,22 €
19	5.999,22 €	35,00 €	100,00 €	65,00 €	5.934,22 €
20	5.934,22 €	34,62 €	100,00 €	65,38 €	5.868,84 €
21	5.868,84 €	34,23 €	100,00 €	65,77 €	5.803,07 €
22	5.803,07 €	33,85 €	100,00 €	66,15 €	5.736,92 €
23	5.736,92 €	33,47 €	100,00 €	66,53 €	5.670,39 €
24	5.670,39 €	33,08 €	100,00 €	66,92 €	5.603,46 €
25	5.603,46 €	32,69 €	100,00 €	67,31 €	5.536,15 €
26	5.536,15 €	32,29 €	100,00 €	67,71 €	5.468,45 €
27	5.468,45 €	31,90 €	100,00 €	68,10 €	5.400,35 €

28	5.400,35 €	31,50 €	100,00 €	68,50 €	5.331,85 €
29	5.331,85 €	31,10 €	100,00 €	68,90 €	5.262,95 €
30	5.262,95 €	30,70 €	100,00 €	69,30 €	5.193,65 €
31	5.193,65 €	30,30 €	100,00 €	69,70 €	5.123,95 €
32	5.123,95 €	29,89 €	100,00 €	70,11 €	5.053,84 €
33	5.053,84 €	29,48 €	100,00 €	70,52 €	4.983,32 €
34	4.983,32 €	29,07 €	100,00 €	70,93 €	4.912,39 €
35	4.912,39 €	28,66 €	100,00 €	71,34 €	4.841,04 €
36	4.841,04 €	28,24 €	100,00 €	71,76 €	4.769,28 €

11) Familie Schlucker hat eine neue Wohnzimmereinrichtung über einen Kredit finanziert. Für die Kreditsumme von 3000.-€ sind bei jährlich 9,5% Zinsen monatliche Raten von 150.-€ fällig. Stelle einen Tilgungsplan auf! Wie lange dauert die Rückzahlung des Kredits?

Monate	Betrag Beginn	Zinsen	Zahlung	Tilungsanteil	Betrag Ende
1	3.000,00 €	23,75 €	150,00 €	126,25 €	2.873,75 €
2	2.873,75 €	22,75 €	150,00 €	127,25 €	2.746,50 €
3	2.746,50 €	21,74 €	150,00 €	128,26 €	2.618,24 €
4	2.618,24 €	20,73 €	150,00 €	129,27 €	2.488,97 €
5	2.488,97 €	19,70 €	150,00 €	130,30 €	2.358,68 €
6	2.358,68 €	18,67 €	150,00 €	131,33 €	2.227,35 €
7	2.227,35 €	17,63 €	150,00 €	132,37 €	2.094,98 €
8	2.094,98 €	16,59 €	150,00 €	133,41 €	1.961,57 €
9	1.961,57 €	15,53 €	150,00 €	134,47 €	1.827,10 €
10	1.827,10 €	14,46 €	150,00 €	135,54 €	1.691,56 €
11	1.691,56 €	13,39 €	150,00 €	136,61 €	1.554,95 €
12	1.554,95 €	12,31 €	150,00 €	137,69 €	1.417,26 €
13	1.417,26 €	11,22 €	150,00 €	138,78 €	1.278,48 €
14	1.278,48 €	10,12 €	150,00 €	139,88 €	1.138,60 €
15	1.138,60 €	9,01 €	150,00 €	140,99 €	997,62 €
16	997,62 €	7,90 €	150,00 €	142,10 €	855,52 €
17	855,52 €	6,77 €	150,00 €	143,23 €	712,29 €
18	712,29 €	5,64 €	150,00 €	144,36 €	567,93 €
19	567,93 €	4,50 €	150,00 €	145,50 €	422,42 €
20	422,42 €	3,34 €	150,00 €	146,66 €	275,77 €
21	275,77 €	2,18 €	150,00 €	147,82 €	127,95 €
22	127,95 €	1,01 €	150,00 €	128,96 €	0,00 €

Wie hoch müsste die monatliche Rate sein, damit der Kredit nach 3 Jahren zurückgezahlt ist? (Rechne mit dem relativen monatlichen Zinssatz!) [96,09€]