

Übungen zu Funktionen / 2. Teil

1) In einer Versammlung sollen alle Mitglieder an einem runden Tisch Platz nehmen. Es stellt sich heraus, dass ein Sessel zu wenig vorhanden ist. Beschreibe folgende Zusammenhänge:

- Wann ist die Zuordnung „Jeder Person wird ihr Sitzplatz zugeordnet“ eine Funktion?
- Was bedeutet es, wenn 1 Sessel leer bleibt und 2 Personen stehen?
- Warum sollte die Zuordnung injektiv sein?
- Beschreibe die Zuordnung „Jedem Sitzplatz wird eine gewisse Person zugeordnet“ in Worten!
- Ist diese Zuordnung eine Funktion?
- Schränke die Zusammenhänge der Zuordnung so ein, dass sie bijektiv wird!

2) Der Tankinhalt eines Autos ändert sich in Abhängigkeit von der Zeit bzw. von der Fahrtstrecke.

- Beschreibe die Zuordnungen „Zeit $\rightarrow$ Tankinhalt“ und „Fahrtstrecke $\rightarrow$ Tankinhalt“ und stelle mögliche Verlaufskurven dar!
- Wie sieht die Funktion aus, wenn man annimmt, dass der Tank 50 Liter Treibstoff fasst?
- Ist diese Zuordnung eine Funktion?
- Wann ist die Funktion injektiv, wann surjektiv?
- Erkläre, weshalb diese Funktion von $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eigentlich nie bijektiv sein wird!

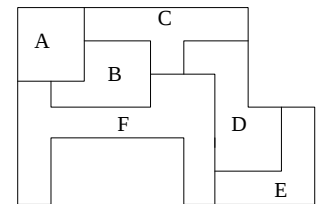
3) Paul und Carmen würfeln um die Wette. Nach 10 Würfeln vergleichen sie die gewürfelten Augenzahlen. Ordnet man jedem Wurf die jeweilige Augenzahl zu, entsteht dadurch eine Funktion?

4) (Fortsetzung)

- Überlege Dir, wann diese Funktion injektiv, surjektiv, bijektiv ist!
- Führe diesen Versuch durch und zeichne Deine „Würfelfunktion!“
- Carmen und Paul addieren alle Augenzahlen der 10 Würfe und vergleichen die Summe. Wird durch die Zuordnung „Wurfanzahl $\rightarrow$ Summe eine Funktion festgelegt? Welche Eigenschaften hat sie?

5) Die Skizze zeigt die Grundstücke von 6 Familien. Jeder Familie wird die Anzahl ihrer Nachbarn zugeordnet.

- Stelle diese Zuordnung dar!
- Ist diese Zuordnung eine Funktion? Ist sie injektiv, surjektiv, bijektiv?
- Zeichne 4 Grundstücke so, dass eine injektive (surjektive), (bijektive) „Nachbarfunktion“ entsteht!



6) Gegeben ist die folgende Zuordnungsvorschrift: „Jeder natürlichen Zahl x wird das kleinste Vielfache von x zugeordnet, dessen Ziffernsumme 9 ist“.

- Stelle die Zuordnung mit Hilfe einer Wertetabelle dar!
- Ist diese Zuordnung eine Funktion? Welche Mengen sind für den Urbild- bzw. Bildbereich geeignet?
- Ist die Funktion injektiv, surjektiv, bijektiv?

7) An einem kalten Buffet herrscht großes Drängen um die wenigen vorhandenen Teller. Manche Gäste essen zu zweit von einem Teller, andere gehen überhaupt leer aus.

- Beschreibe diesen Sachverhalt durch eine Funktion und gib ihre Eigenschaften an!
- Überlege Dir selbst ähnliche Fragestellungen!

8) Welche der folgenden Vorschriften definieren eine Funktion

$f : \{x : x \text{ ist an der Johannes Kepler Universität inskribiert}\} \rightarrow \mathbb{N}_0$?

Wenn nicht, wo liegt das Problem?

- (a) $x \mapsto$ Kennzahl des von x inskribierten Studiums
 - (b) $x \mapsto$ Code der Bankomatkarte von x
 - (c) $x \mapsto$ Matrikelnummer von x
 - (d) $x \mapsto$ Geburtsjahr von x minus 1972
 - (e) $x \mapsto 1$
- 9) Sei f jene Funktion, die jedem Schüler einer Klasse seine Zeugnisnote in Mathematik zuordnet.
Erklären Sie einfach, was es bedeutet, wenn f
- (a) surjektiv
 - (b) injektiv
 - (c) bijektiv ist.
- 10) Bei einer Sitzung sei k jene Funktion von der Menge aller kaffeetrinkenden Sitzungsteilnehmer in die Menge aller im Sitzungszimmer vorhandenen Kaffeetassen, die jedem Sitzungsteilnehmer die Kaffeetasse, aus der er trinkt, zuordnet. (Jeder Teilnehmer trinkt aus genau einer Tasse.) Was bedeutet es, wenn k
- (a) nicht injektiv
 - (b) surjektiv
 - (c) nicht injektiv und nicht surjektiv ist?
- 11) Bestimmen Sie jeweils für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, ob f injektiv, surjektiv oder bijektiv ist:
- (a) $x \mapsto x$
 - (b) $x \mapsto x^4$
 - (c) $x \mapsto e^x$
- 12) Gegeben seien die Abbildungen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x + 1$; $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2 - x^2$ und $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$ für $x \geq 0$ und $x \mapsto -x$ für $x < 0$.
- (a) Berechnen Sie:
 $f(-2)$ $g(1)$ $fg(-5)$
 - (b) Geben Sie die Zuordnungsvorschrift folgender Funktionen an und skizzieren Sie deren Graphen:
i) $f \circ g$ ii) $g \circ f$ iii) f^{-1} iv)
- 13) Zeigen Sie (etwa anhand des Graphen), dass die Abbildung
 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto (x-2)/(x-3)$ für $x \neq 3$ und $x \mapsto 1$ für $x=3$
bijektiv ist, und bestimmen Sie die Abbildungsvorschrift von f^{-1} !
- 14) Geben Sie jeweils ein Beispiel für Funktionen f mit folgenden Eigenschaften an:
- a) f ist surjektiv, aber nicht injektiv.
 - b) f ist injektiv, aber nicht surjektiv.
 - c) f ist injektiv auf $\mathbb{R}^+$, aber nicht surjektiv!
- 15) Wieviele Funktionen von $\{a, b, c\}$ nach $\{1, 2, 3, 4\}$ gibt es? Wieviele davon sind injektiv, surjektiv, bijektiv?
- 16) Bei der Produktion eines bestimmten Artikels betragen die fixen Kosten 18 000.-S und die variablen Kosten 16.-S je Stück.
- (a) Wie hoch muss der Verkaufspreis sein, damit die Gewinnschwelle bei 2000 Stück liegt?
 - (b) Geben Sie die Funktionsgleichung für die Kosten- bzw. die Erlösfunktion an sowie jeweils einen sachbezogenen Definitionsbereich.
 - (c) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion!
- 17) Ein Unternehmen, das sich auf die Herstellung von Fertigergeräten spezialisiert hat, weiß aus Erfahrung, daß der Absatz bei Einführung eines neuen Produktes

zunächst langsam zunimmt, dann schneller und dann wieder langsamer zunimmt und schließlich sinkt, weil der Geschmack der Käufer wechselt. Durch jahrelange Beobachtung wurde für die ersten Jahre die folgende Funktion für die Abhängigkeit des Absatzes y von der Zeit x (in Jahren) gefunden:

$$y = 12x^2 - 4x^3$$

- (a) Zeichnen Sie den Graph der Absatzfunktion.
- (b) Geben Sie den Definitionsbereich und den Wertebereich dieser Funktion an.
- (c) Um welche Art von Funktion handelt es sich?
- (d) Welche Bedeutung haben die Nullstellen der Funktion?
- (e) Kann man aus dem Graphen "herauslesen", wann der Absatz steigt bzw. fällt?

18) Zeigen Sie:

$x_1 = -3$ und $x_2 = 0$ sind Nullstellen des Polynoms

$$p_4(x) = x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 27x$$

- a) Besitzt p weitere Nullstellen?
- b) Berechnen Sie diese Nullstellen gegebenenfalls!